1B	Devoir de mathématiques II	24.03.06

Remarque : La V200 est autorisée tout au cours de l'épreuve dans les limites imposées par le programme. Dans la question 2, elle peut être utilisée sans restriction.

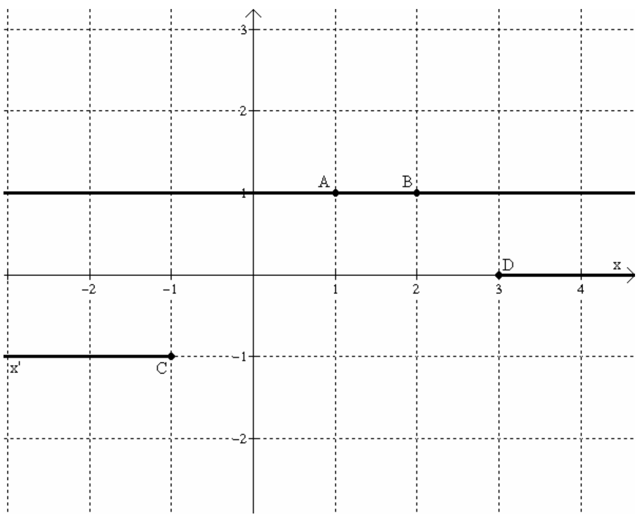
Question 1 — 20 (=8+10+2) points

(1) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface finie délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{1}{4}\sqrt{(x-6)(x^2-4)}$ et l'axe des abscisses.

(2) Justifier que ce solide de révolution a approximativement la forme d'un œuf.

(3) Quel est le diamètre maximal du cercle obtenu en coupant l'œuf par un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie ?

Question 2 : problème — 40 (=6+4+10+10+10) points



Sur la figure ci-contre, les deux routes $[Cx'$ et $[Dx$ doivent être reliées à l'autoroute AB. Tous les raccords doivent être réalisés « tangentiellement » et « sans heurts ».

(1) Soit p le polynôme de degré minimal réalisant la connexion des points C et A. Justifier que p est de la forme $p(x) = ax^5 + bx^3 + cx$, puis déterminer les constantes a, b et c.

(2) Calculer et factoriser $p'(x)$. Expliquer ce résultat !

(3) Soit q le polynôme de degré minimal réalisant la connexion des points B et D. En utilisant l'idée de la question (2), déterminer d'abord une factorisation de $q'(x)$ avec un seul paramètre inconnu d, puis une expression de $q(x)$ avec deux paramètres inconnus d et e. Déterminer ensuite les constantes d et e en utilisant les données de la figure. Justifier finalement que q a une racine triple !

(4) Une autre méthode permettant d'obtenir q est de manipuler astucieusement le graphe de p à l'aide de transformations géométriques élémentaires. Expliciter

toutes les étapes de cette manipulation et en déduire $q(x)$ en fonction de p. Retrouver ainsi $q(x)$.

(5) On rappelle que si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$, alors la longueur de l'arc de courbe de $\mathcal{G}_f$ reliant les points d'abscisses a et b est :

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Calculer les longeurs des deux arcs de route à construire, puis justifier que l'arc $\widehat{AC}$ mesure exactement le double de l'arc $\widehat{BD}$:

a) par des arguments purement géométriques ;

b) par un calcul intégral utilisant la relation entre p et q de la question (4).

G. Lorang