Question 1

(1) Déterminer les domaines de ***définition***, de ***continuité*** et de ***dérivabilité*** de f.

C.E.: $2 - e^{2x} > 0 \iff e^{2x} < 2 \iff x < \frac{\ln 2}{2}$

$\operatorname{dom} f = \left]-\infty ; \frac{\ln 2}{2}\right[= \operatorname{dom}_c f$
$= \operatorname{dom}_d f$

(2) Déterminer les ***asymptotes éventuelles*** au graphe de f, noté $\mathcal{G}_f$.

$$\lim_{x \to \frac{\ln 2}{2}} \frac{\overbrace{e^x}^{\to \sqrt{2}}}{\underbrace{\sqrt{2-e^{2x}}}_{\to 0^+}} = +\infty \qquad \underline{\text{A.V.}: x = \tfrac{\ln 2}{2}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{2-e^{2x}}}_{\to \sqrt{2}}} = 0 \qquad \underline{\text{A.H.}: y = 0} \quad \underline{\text{si } x \to -\infty}$$

(3) Etudier le ***sens de variation*** de f. Etablir une ***équation cartésienne*** de la tangente t_0 à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse 0.

$\forall x \in \operatorname{dom}_d f,$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \sqrt{2-e^{2x}} - e^x \cdot \frac{-2 \cdot e^{2x}}{2\sqrt{2-e^{2x}}}}{2 - e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x \cdot (2-e^{2x}) + e^x \cdot e^{2x}}{\sqrt{2-e^{2x}} \cdot (2-e^{2x})}$$

$$= \frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}} \cdot (2-e^{2x})} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\operatorname{dom} f$.

$f(0) = 1$; $f'(0) = 2$

éq. de T_0 : $\underline{y = 2 \cdot x + 1}$

> ***Remarque*** : Pour le calcul de $f''(x)$, il est plus pratique d'écrire :
> $$f'(x) = \frac{2e^x}{\left(2 - e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(4) $\left(\forall x \in \left]-\infty, \frac{\ln 2}{2}\right[\right)$

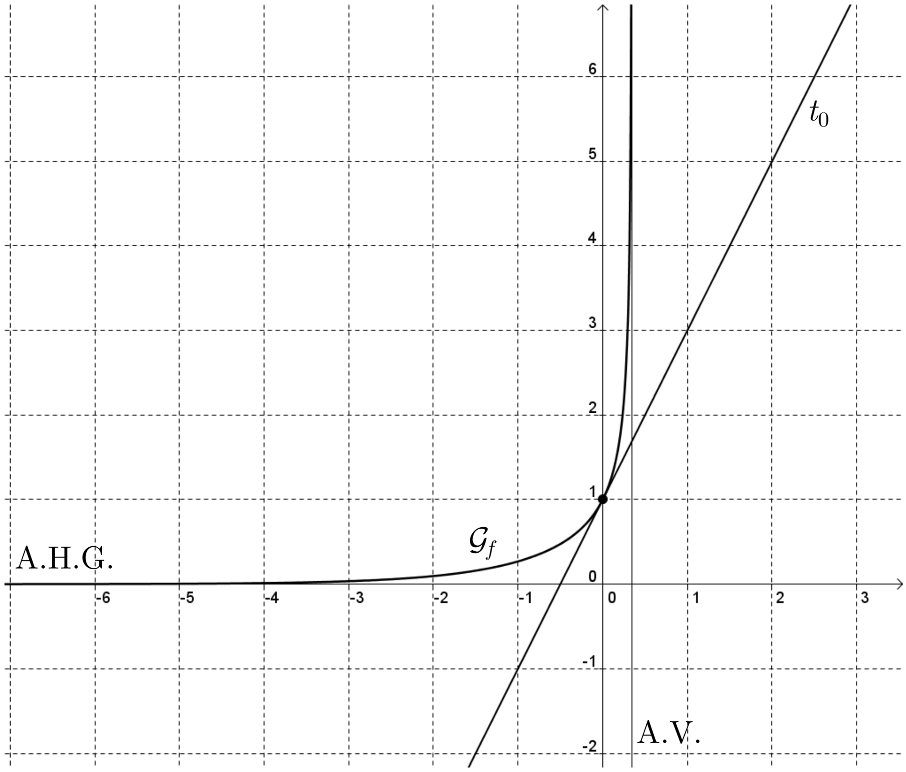
$$f''(x) = \frac{2e^x\left(2-e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}} - 2e^x \frac{3}{\cancel{2}}\left(2-e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\cancel{2}e^{2x}\right)}{\left(2-e^{2x}\right)^3}$$

$$= \frac{2e^x\left(2-e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(2-e^{2x}\right)+3e^{2x}\right]}{\left(2-e^{2x}\right)^3} .$$

$$= \frac{4e^x\left(1+e^{2x}\right)}{\left(2-e^{2x}\right)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

Donc f est une fonction ***convexe***, c.-à-d. une fonction dont la concavité du graphe est toujours tournée vers le haut. En particulier, $\mathcal{G}_f$ n'a pas de points d'inflexion.

(5) Représentation graphique :



(6) Déterminer la ***primitive*** F de f qui s'annule en 0.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$$

$$= \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) + C \qquad = F(x)$$

Déterminons C :

$F(0) = 0$

$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + C = 0$

$\Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{4}$

d'où : $F(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}$

Question 2

(1) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} \underset{t=\ln^2 x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t-1}{t+1} = 1 = g(0)$.

Donc g est continue en 0 et $\mathrm{dom}_c\, g = \mathbb{R}_+$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \underset{t=\ln^2 x}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t-1}{t+1} = 1 \Rightarrow$ A.H.D : $y = 1$.

(3) Dérivabilité en 0 :

$$\cancel{g'(0)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x + 1} - \dfrac{\ln^2 x + 1}{\ln^2 x + 1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x\left(\ln^2 x + 1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-1}}{\ln^2 x + 1}$$

$$\underset{H}{\overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{-2}}{2\ln x \cdot x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x}$$

$$\underset{H}{\overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-2}}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

Donc g n'est pas dérivable en 0 et $\operatorname{dom} g' =]0,+\infty[$. $\mathcal{G}_g$ admet en (0,1) une demi-tangente verticale.

$(\forall x > 0)$

$$g'(x) = \frac{2\ln x \cdot x^{-1}\left(\ln^2 x + 1\right) - \left(\ln^2 x - 1\right)\cdot 2\ln x \cdot x^{-1}}{\left(\ln^2 x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{2\ln x \cdot x^{-1}\left[\left(\ln^2 x + 1\right) - \left(\ln^2 x - 1\right)\right]}{\left(\ln^2 x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{4\ln x}{x\left(\ln^2 x + 1\right)^2} \quad \text{(a le signe de } \ln x\text{)}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	-1 (m)	$\nearrow$	1

(4) Si $x > 0$, calculons à part :

$$\left[x\left(\ln^2 x + 1\right)^2\right]' = \left(\ln^2 x + 1\right)^2 + x \cdot 2\left(\ln^2 x + 1\right)\cdot 2\ln x \cdot x^{-1}$$

$$= \left(\ln^2 x + 1\right)\left[\left(\ln^2 x + 1\right) + 4\ln x\right]$$

$$= \left(\ln^2 x + 1\right)\left(\ln^2 x + 4\ln x + 1\right)$$

Donc :

$$g''(x) = 4\left(\frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x + 1\right)^2}\right)'$$

$$= 4\,\frac{\cancel{x^{-1}}\,\cancel{x}\left(\ln^2 x + 1\right)^2 - \ln x \cdot \left(\ln^2 x + 1\right)\left(\ln^2 x + 4\ln x + 1\right)}{x^2\left(\ln^2 x + 1\right)^4}$$

$$= 4\,\frac{\left(\ln^2 x+1\right)\left[\left(\ln^2 x+1\right)-\ln x\cdot\left(\ln^2 x+4\ln x+1\right)\right]}{x^2\left(\ln^2 x+1\right)^4}$$

$$= 4\,\frac{\ln^2 x+1-\ln^3 x-4\ln^2 x-\ln x}{x^2\left(\ln^2 x+1\right)^3}$$

$$= \frac{-4\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+\ln x-1\right)}{x^2\left(\ln^2 x+1\right)^3}$$

Cette dérivée seconde a le ***signe opposé*** de $\ln^3 x+3\ln^2 x+\ln x-1$.

Posons $t=\ln x$ et étudions le signe de $p(t)=t^3+3t^2+t-1$.

Une racine évidente de $p(t)$ est -1. Le schéma de Horner donne :

$$p(t)=(t+1)\left(t^2+2t-1\right).$$

Les racines du trinôme t^2-2t-1 sont :

$$t_1=-1-\sqrt{2} \text{ et } t_2=-1+\sqrt{2}\,.$$

On fait le tableau du signe de $p(t)$ et on en déduit celui de $g''(x)$:

x	0	$e^{-1-\sqrt{2}}$		e^{-1}		$e^{-1+\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g''(x)$	$\Vert$ $+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$\mathcal{G}_g$	$\cup$	I_1	$\cap$	I_2	$\cup$	I_3	$\cap$

Il y a donc 3 points d'inflexion :

$$I_1\left(e^{-1-\sqrt{2}},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ I_2\left(e^{-1},0\right) \text{ et } I_3\left(e^{-1+\sqrt{2}},-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

En effet : $g\left(e^{-1}\right)=\dfrac{\ln^2\left(e^{-1}\right)-1}{\ln^2\left(e^{-1}\right)+1}=0$ et

$$g\left(e^{-1\pm\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln^2\left(e^{-1\pm\sqrt{2}}\right)-1}{\ln^2\left(e^{-1\pm\sqrt{2}}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(-1\pm\sqrt{2}\right)^2-1}{\left(-1\pm\sqrt{2}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1\mp2\sqrt{2}+2-1}{1\mp2\sqrt{2}+2+1}$$

$$=\frac{2\mp2\sqrt{2}}{4\mp2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left(1\mp\sqrt{2}\right)\left(2\pm\sqrt{2}\right)}{\left(2\mp\sqrt{2}\right)\left(2\pm\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2}\mp2\sqrt{2}-2}{2}$$

$$=\frac{\mp\sqrt{2}}{2}$$

Question 3

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$ (sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{k\cdot 2\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$)

$$= \int u'u^{-2}\mathrm{d}x \qquad \text{On pose : } u = 1-\cos x$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1}+k \qquad u' = \sin x$$

$$= \frac{1}{\cos x - 1}+k$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}_+^*$)

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad \text{On pose : } u = \sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x} + 2\int u'e^{u}\mathrm{d}x \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + k$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\left(x^2-2x+3\right)^5}\,\mathrm{d}x$ (sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$; $\Delta < 0$)

$$= -\frac{1}{2}\int u'u^{-5}\mathrm{d}x \qquad \text{On pose : } u = x^2-2x+3$$

$$u' = 2x-2$$

$$= \frac{u^{-4}}{8}+k$$

$$= \frac{1}{8\left(x^2-2x+3\right)^4}+k$$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\ln t - 1)\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ (sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}_+^*$)

$$= \int \frac{1}{t}\ln^2 t - \frac{1}{t}\ln t\,\mathrm{d}t \qquad \text{On pose : } u = \ln t$$

$$= \frac{\ln^3 t}{3} - \frac{\ln^2 t}{2} + k \qquad u' = \frac{1}{t}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{7-3x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (sur un intervalle I inclus dans $]-3,3[$)

$$= 7\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 7\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{3} + 3\sqrt{9-x^2}+k$$

(6) $\displaystyle\int \frac{2^x-5}{3^{2x}}\,\mathrm{d}x$ (sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$)

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{2}{9}\right)^x \mathrm{d}x - 5\int \left(\frac{1}{9}\right)^x \mathrm{d}x \\
&= \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{9}\right)} - 5\,\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{9}\right)} + k \\
&= \frac{1}{\ln 2 - 2\ln 3}\left(\frac{2}{9}\right)^x + \frac{5}{2\ln 3}\left(\frac{1}{9}\right)^x + k
\end{aligned}
$$

G. Lorang