1B | Devoir de mathématiques I,3 | 12.12.08

Question 1

(1) C.E.

$$\begin{cases} 3x-x^2>0 \Leftrightarrow x(3-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<3 \\ \dfrac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0 \\ x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\,]0,3[\,\setminus\{1\}$$

Alors :

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(3x-x^2\right)-\log_2\frac{1}{x}+\log_4|x-1|=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(3x-x^2\right)}{-2}+\log_2 x+\frac{\log_2|x-1|}{2}=0\,/\cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x-x^2\right)=2\log_2 x+\log_2|x-1|$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x-x^2\right)=\log_2 x^2|x-1|$$

$$\Leftrightarrow x(3-x)=x^2|x-1|$$

$$\Leftrightarrow 3-x=x|x-1|$$

Si $x>1$ alors l'équation devient :

$$3-x=x(x-1)\Leftrightarrow x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}\,.$$

Si $x<1$ alors l'équation devient :

$$3-x=x(1-x)\Leftrightarrow x^2-2x+3=0\,,$$

Il n'y a pas de solution dans ce cas car $\Delta=4-12=-8<0$.

Finalement, en tenant compte des C.E. on a : $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$.

(2) C.E. : $x>0$ et $x\neq 1 \Leftrightarrow x\in\,]0,+\infty[\,\setminus\{1\}$

Alors : $\log_9 x-\dfrac{1}{\log_3 x}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 x}{2}-\dfrac{1}{\log_3 x}\geq 1$

On pose $y=\log_3 x$, ce qui conduit à l'inéquation :

$$\frac{y}{2}-\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow \frac{y^2-2y-2}{2y}\geq 0$$

Les racines du trinôme au numérateur sont :

$$r_1=1-\sqrt{3} \text{ et } r_2=1+\sqrt{3}\,.$$

y	$-\infty$	r_1		0		r_2	$+\infty$
y^2-2y-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2y$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{y^2-2y-2}{2y}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Donc : $r_1\leq y<0$ ou $y\geq r_2$. On revient à x :

$$r_1\leq \log_3 x<0 \text{ ou } \log_3 x\geq r_2$$

$$\Leftrightarrow 3^{1-\sqrt{3}}\leq x<1 \text{ ou } x\geq 3^{1+\sqrt{3}}$$

D'où : $S=\left[3^{1-\sqrt{3}},1\right[\cup\left[3^{1+\sqrt{3}},+\infty\right[$

Question 2

(1) a) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=x-\operatorname{Arctan}x+k\,.$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{Arctan} x \, \mathrm{d}x$ (i.p.p.)

$$= \operatorname{Arctan} x\,(x - \operatorname{Arctan} x) - \int \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{\operatorname{Arctan}^2 x}{2} + k$$

$$= x \operatorname{Arctan} x - \frac{\operatorname{Arctan}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + k$$

(2) a) On effectue la division euclidienne :

$$x^2 - x - 1 = \left(x^2 + 2x + 3\right)\cdot 1 - 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{3x+4}{x^2+2x+3},$$

donc $a = 1$, $b = -3$ et $c = -4$.

b) Comme le dénominateur ne s'annule jamais, la primitive cherchée existe sur $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 3}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{3x+4}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= x - \int \frac{3x+3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

(3) a) On multiplie les deux membres de l'égalité donnée par x^2 :

$$\frac{2x-3}{x+2} = px + q + \frac{rx^2}{x+2} \quad (*)$$

et on pose $x = 0$ dans $(*)$, ce qui donne : $-\dfrac{3}{2} = q$.

On multiplie ensuite les deux membres de l'égalité par $x+2$:

$$\frac{2x-3}{x^2} = \left(\frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}\right)(x+2) + rx^2 \quad (**)$$

et on pose $x = -2$ dans $(**)$, ce qui donne : $-\dfrac{7}{4} = r$.

Finalement, on pose $x = 1$ dans $(*)$, ce qui donne :

$$-\frac{1}{3} = p - \frac{3}{2} - \frac{7}{12} \Leftrightarrow p = -\frac{1}{3} + \frac{7}{12} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

D'où :

$$\frac{2x-3}{x^2(x+2)} = \frac{7}{4x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{7}{4(x+2)}$$

b) Sur $]-2,0[$, on a donc :

$$\int \frac{2x-3}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{4x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{7}{4(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}\ln|x+2| + k$$

$$= \frac{7}{4}\ln(-x) + \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}\ln(x+2) + k$$

(4) L'intégrale proposée existe sur $]-\infty,-2[$. On fait la substitution $t = 2 - x \Leftrightarrow x = 2 - t$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2(2-t)-1}{\sqrt{t}}(-\mathrm{d}t)\\ &= \int \frac{2t-3}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t - 3\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 3\cdot 2\sqrt{t} + k\\ &= \left(2\cdot\frac{2}{3}t - 3\cdot 2\right)\sqrt{t} + k\\ &= \left(\frac{4}{3}t - 6\right)\sqrt{t} + k\\ &= \left[\frac{4}{3}(2-x) - 6\right]\sqrt{2-x} + k\\ &= -\left(\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}\right)\sqrt{2-x} + k\end{aligned}$$

Question 3

On considère la fonction

$$f : x \mapsto 1 - \left|e^x - e^{2x}\right|$$

(1) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto |x|$ n'étant pas dérivable en 0, il faut étudier le signe de $e^x - e^{2x}$.

$$e^x - e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{2x} \Leftrightarrow x \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Donc :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x + e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + e^x - e^{2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

D'où :

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x + 2e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ e^x - 2e^{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_g'(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0^-} f'(x) \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} f_d'(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} f'(x) \\ &= -1 \end{aligned}$$

f n'est donc pas dérivable en 0 et $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}^*$. $\mathcal{G}_f$ admet en $(0,1)$ deux demi-tangentes obliques de coefficients angulaires 1 et –1. Le point $(0,1)$ est un point anguleux du graphe.

(2) a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - e^x + e^{2x} = 1 \Rightarrow$ A.H.G : $y = 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^x - e^{2x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 + e^x(1 - e^x) = -\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.D

c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^x - e^{2x}}{x}\\ &\overset{\text{f.i.}\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^x - 2e^{2x}}{1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 + e^x(1 - 2e^x)\\ &= -\infty \Rightarrow \text{B.P. dans la direction de } Oy\end{aligned}$$

(3) Si $x < 0$, $f'(x) = -e^x + 2e^{2x} = e^x(-1 + 2e^x)$

Or : $2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

Si $x > 0$, $f'(x) = e^x(1 - 2e^x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où le TV :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$3/4$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
			(m)		(M)		

(4) Représentation graphique :