1B Devoir de mathématiques II,1 13.12.09

Question 1 8 (=6+2) points

(1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée est f.

(2) ***Application*** : Quels sont le domaine, le sens de variation et le signe de la fonction G définie par : $G(x) = \int_1^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$?

Question 2 20 (=8+1+4+1+4+2) points

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 5(x-1)e^{1-x}$.

(1) Etudier f : domaines, limites et asymptotes, dérivée, tableau de variation, racines.

(2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

(3) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la surface délimitée par $\mathcal{G}_f$, l'axe des x et la droite d'équation $x = \lambda$, avec $\lambda > 1$.

(4) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

(5) Calculer le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ du solide engendré par la révolution autour de l'axe des x de la surface définie à la question (3).

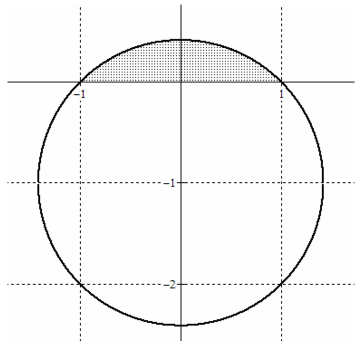
(6) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$.

Question 3 20 (=6+4+7+3) points

(1) Déterminer l'aire de la partie finie du plan délimitée par l'hyperbole d'équation $xy = 4$ et les deux droites d'équations $y = x+3$ et $y = x-3$.

(2) Déterminer l'aire de la partie finie du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = x^3 - 3x^2$.

(3) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface hachurée ci-contre.



(4) Déterminer le volume d'une boule de rayon $r > 0$ en utilisant le calcul intégral.

Question 4 12 (=6+6) points

(1) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}$. Trouver sur un intervalle I à préciser la primitive de f qui prend la valeur π en 1.

(2) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^2 30x\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x$$

G. Lorang