1B	Corrigé du devoir II,1	13.12.09

Question 1

(1) Voir manuel.

(2) ***Domaine*** : G est définie sur $\mathbb{R}$ car l'intégrand, $g : u \mapsto e^{-u^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation : G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Signe : G s'annule en $x = 1$, donc G est strictement positive sur $]1, +\infty[$ et strictement négative sur $]-\infty, 1[$.

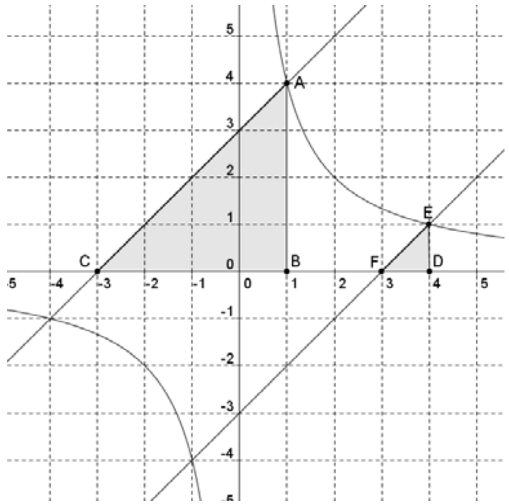
Question 2

Voir corrigé de l'épreuve de septembre 2008, section B.

Question 3

(1) En utilisant les notations de la figure ci-dessous :

$$\mathcal{A} = 2\cdot\left(\text{aire}\,ABC + \int_1^4 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x - \text{aire}\,EDF\right)$$
$$= 2\cdot\left(8 + 4[\ln x]_1^4 - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 15 + 8\ln 4$$
$$= 15 + 16\ln 2 \text{ u.a.}$$



(2) Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3 - 3x^2$. On détermine les points d'intersection des courbes représentatives :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

Donc :

$$\mathcal{A} = \left|\int_0^4 g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\int_0^4 x^3 - 4x^2\,\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3}\right]_0^4\right|$$
$$= \left|\frac{4^4}{4} - \frac{4^4}{3}\right| = \frac{4^4}{12} = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

(3) L'équation du cercle est :

$$x^2 + (y+1)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow y = -1 \pm \sqrt{2 - x^2}$$

Le volume du solide de révolution est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= 2\pi\int_0^1 \left(-1 + \sqrt{2 - x^2}\,\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^1 1 - 2\sqrt{2 - x^2} + 2 - x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^1 3 - x^2 - 2\sqrt{2 - x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \underbrace{\int_0^1 3 - x^2 \,\mathrm{d}x}_{I_1} - 4\pi \underbrace{\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} \,\mathrm{d}x}_{I_2}
\end{aligned}$$

Or :

- $$I_1 = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

- $$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{2\left(1 - \left(\tfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} \mathrm{d}x \qquad x = \sqrt{2}t \;; \mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - t^2} \,\mathrm{d}t \qquad t = \sin u \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2u \,\mathrm{d}u \\
&= \left[u + \tfrac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{V} = \dfrac{16\pi}{3} - \pi^2 - 2\pi = \dfrac{10\pi}{3} - \pi^2$ u.v.

(4) Voir manuel p. 95.

Question 4

Voir corrigé de l'épreuve de septembre 2007, section B.

G. Lorang