1B Corrigé du devoir de mathématiques II,3 8.05.09

Question 1

(1) On a : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, c.-à-d. f est continue en 0.

Il est clair que f est continue en tout autre réel > 0, donc $\operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+$.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln x + 1}{e^x} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 1}{e^x} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{xe^x} = 0$, donc A.H.D. : $y = 0$.

(3) Il est clair que f est dérivable en tout réel > 0 et :

$$\begin{aligned}\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\quad f'(x) &= -e^{-x}(x\ln x + 1) + e^{-x}(\ln x + 1)\\ &= e^{-x}(1-x)\ln x\end{aligned}$$

Etude de la dérivabilité en 0 :

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x - 0} \overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty\,.$$

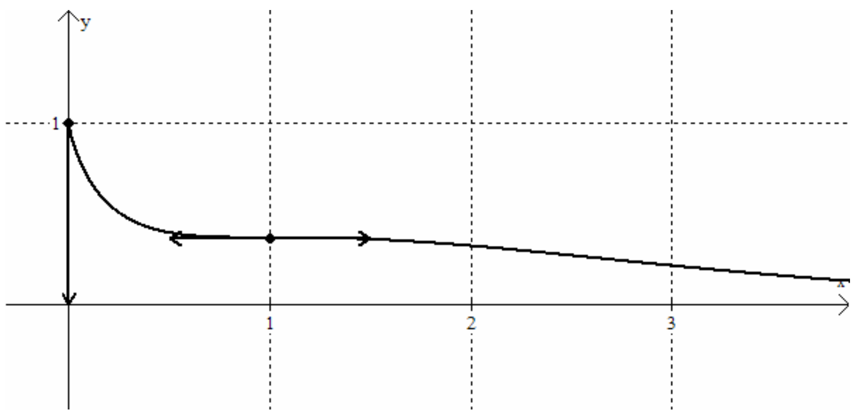
Donc f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{G}_f$ admet une demi-tangente verticale en (0,1).

$f'(x)$ a le signe de $(1-x)\ln x$. Un tableau du signe montre que ce produit est toujours ≤ 0 et s'annule uniquement en $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$	0	$-$
$f(x)$	1 (M) ↘	$\frac{1}{e}$	↘ 0

Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion à tangente horizontale.

(4) Représentation graphique :



Question 2

(1) C.E. :

$$\begin{cases} x>0 \text{ et } x\neq 1 \\ 1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \\ x+5>0 \Leftrightarrow x>-5 \end{cases} \qquad \text{donc } D=\left]0,1\right[$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \log_x \sqrt{1-x} + \log_{x^2}(x+5) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln(1-x)}{2\ln x} + \frac{\ln(x+5)}{2\ln x} \geq 0 \,/\cdot \ln x < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left[(1-x)(x+5)\right] \leq \ln 1 \\ \Leftrightarrow\ & x+5-x^2-5x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2-4x+4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+4x-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 \geq 8 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq -2-2\sqrt{2} \text{ ou } x \geq -2+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $S=\left]-2+2\sqrt{2},1\right[$.

(2) On a :

$$\begin{aligned} & 4^x - 2^{x+1} = m \\ \Leftrightarrow\ & 2^{2x} - 2\cdot 2^x - m = 0 \end{aligned}$$

On pose : $2^x = y > 0$.

L'équation devient alors :

$$y^2 - 2y - m = 0 \quad (E'_m).$$

Cette équation est toujours du 2e degré. Son discriminant est : $\Delta = 4+4m$.

Le produit des racines est $P=-m$, la somme des racines est : $S=2$.

Discussion :

m	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	$+$	$+$
P	$+$	$+$	$+$	0	$-$
S	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Nombre et signe des solutions de (E'_m)	0	1 $+$	2 $+,+$	2 $+,0$	2 $+,-$
Nbre de sol. de (E_m)	0	1	2	1	1

Question 3

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}[\,x + \sin 2x\,]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + \cos 4x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{7\sqrt{3}}{64}
\end{aligned}
$$

(2) On peut faire la substitution :

$$t = \tan x\,,\ \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x \ \text{ et } \ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Donc :

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2}{1+t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\mathrm{d}u}{3+3u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}[\,\mathrm{Arctan}\, u\,]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$t = \sqrt{3}u,\ \mathrm{d}t = \sqrt{3}\ \mathrm{d}u$$

t	0	1
u	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

G. Lorang