

1B Devoir de mathématiques I,1 22.10.10

Question 1

19 (5+5+5+4) points

(1) Énoncer et démontrer la formule donnant le lien entre deux logarithmes de bases différentes. Donner trois cas particuliers de cette formule.

(2) Étant donné un réel x strictement positif, on pose $\log x = a$. Exprimer en fonction de a les expressions suivantes :

a) $[\log_{0,1}(100x)]^4$ b) $\log_x^2 \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ c) $\frac{\ln x}{x}$

(3) Exprimer en fonction de $p = \ln 2$ et $q = \ln 3$ les nombres suivants :

a) $\ln \frac{12}{e^3}$ b) $\frac{\log_3 16}{\log_2 27}$ c) $\log_6 \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

(4) Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{2x-3}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}$

Question 2

18 (=5+5+3+5) points

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x} \geq \log_8 x$

(2) $\log_9 x - \frac{1}{\log_3 x} \geq 1$

(3) $2^{1+x} + 3 \cdot 2^{-x} = 7$

(4) $e^{6x} > 3e^{3x} - 4e^{-3x}$

Question 3

23 (=4+5+5+1+5+3) points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x - 1} & \text{si } x > 0 \\ e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(1) Déterminer le domaine de définition de f . Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

(2) Étudier l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f .

(3) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

(4) Quelle est la nature du point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f ? Justifier ! Déterminer l'équation de la tangente t à \mathcal{G}_f au point d'abscisse 0.

(5) Déterminer $f''(x)$ et en déduire la concavité et les points d'inflexion de \mathcal{G}_f .

(6) Représenter graphiquement f et la tangente t dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).