Nom : .... Prénom : ....

1B Corrigé partiel du devoir I,1 22.10.10

Question 1

(1) Voir manuel.

b) $\log_x^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ c) $\dfrac{\ln x}{x}$

(2) a)

$$\begin{aligned}\left[\log_{0,1}\left(100x\right)\right]^4 &= \left[\log_{0,1}\left(100\right)+\log_{0,1}\left(x\right)\right]^4 \\ &= \left(\frac{\log 100}{\log 0,1}+\frac{\log x}{\log 0,1}\right)^4 \\ &= \left(-2-a\right)^4 = \left(a+2\right)^4\end{aligned}$$

b) $\log_x^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log_x^2 10^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{9}\log_x^2 10 = \dfrac{1}{9\log^2 x} = \dfrac{1}{9a}$

c) $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 10^a}{10^a} = \dfrac{a\ln 10}{10^a} \quad \left(=\dfrac{a}{\log e\cdot 10^a}\right)$

(3) a) $\ln\dfrac{12}{e^3} = \ln 12 - \ln e^3 = 2\ln 2 + \ln 3 - 3 = 2p+q-3$

b) $\dfrac{\log_3 16}{\log_2 27} = \dfrac{\ln 16}{\ln 3}\cdot\dfrac{\ln 2}{\ln 27} = \dfrac{4\ln^2 2}{3\ln^2 3} = \dfrac{4p^2}{3q^2}$

c) $\log_6\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\log_6\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\ln 2-\ln 3}{\ln 6} = \dfrac{p-q}{3\left(p+q\right)}$

(4) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{1}{1+x}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)^{2x-3}$

On pose :

$$-\frac{1}{1+x} = h \Leftrightarrow 1+x = -\frac{1}{h} \Leftrightarrow x = -1-\frac{1}{h}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{2x-3} = \lim_{h\to0}\left(1+h\right)^{-5-\frac{2}{h}} = \lim_{h\to0}\left[\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right]^{-2}\left(1+h\right)^{-5} = e^{-2}$$

b) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln\left(1+h\right)-h}{h^2} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+h}-1}{2h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{-h}{1+h}}{2h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{2\left(1+h\right)} = -\dfrac{1}{2}$

Question 2

(1) Examen de fin d'études secondaires : session de juin 2009.

(2) C.E. : $x>0$ et $\log_3 x \neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 9} - \frac{1}{\log_3 x} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 x}{2} - \frac{1}{\log_3 x} \geq 1$$

Posons : $y = \log_3 x$.

L'inéquation devient :

$$\frac{y}{2} - \frac{1}{y} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 2y - 2}{2y} \geq 0$$

On étudie le signe de cette dernière fraction et on trouve que :

$$1 - \sqrt{3} \leq y < 0 \text{ ou } y \geq 1 + \sqrt{3}$$

Ensuite on revient à x :

$$1 - \sqrt{3} \leq \log_3 x < 0 \text{ ou } \log_3 x \geq 1 + \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow 3^{1-\sqrt{3}} \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 3^{1+\sqrt{3}}$$

Donc : $S = \left[3^{1-\sqrt{3}}, 1\right[\cup \left[3^{1+\sqrt{3}}, +\infty\right[$

(3) Facile ! On pose : $y = 2^x$ ...

(4) On pose : $u = e^{3x} > 0$ et l'inéquation devient :

$$u^2 > 3u - \frac{4}{u} \; / \cdot u > 0$$
$$\Leftrightarrow u^3 - 3u^2 + 4 > 0$$

On cherche une racine entière du polynôme $p(u) = u^3 - 3u^2 + 4$ et on trouve que $p(-1) = 0$. Donc $p(u)$ est divisible par $u + 1$. Le schéma de Horner donne :

$$p(u) = (u+1)(u^2 - 4u + 4) = (u+1)(u-2)^2$$

Donc l'inéquation devient :

$$(u+1)(u-2)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow u > -1 \text{ et } u \neq 2$$

On revient à x : $e^{3x} > 1$ est toujours vrai et $e^{3x} \neq 2 \Leftrightarrow 3x \neq \ln 2 \Leftrightarrow x \neq \frac{\ln 2}{3}$.

Donc : $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\ln 2}{3}\right\}$.

Question 3

Examen de fin d'études secondaires : session de juin 2010.

G. Lorang