1B | Corrigé du devoir I,2 | 19.11.2010

Question 1

Voir : Examen de fin d'études secondaires 2009, session de juin.

Question 2

$$\left(m-2\right)e^{2x}+2me^{x}-1=0 \qquad \text{(E)}$$

Si l'on pose : $y=e^{x}$, alors l'équation devient :

$$\left(m-2\right)y^{2}+2my-1=0 \qquad \text{(E')}$$

L'équation (E) admet une solution x pour chaque solution ***positive*** y de $\left(\text{E'}\right)$.

1**^er^ **cas : $m=2$. Alors l'équation $\left(\text{E'}\right)$ s'écrit : $4y=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}$, elle a donc solution unique, positive. L'équation (E) a également une solution unique dans ce cas. (En effet, $e^{x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\ln 4$.)

2**^e^ **cas : $m \neq 2$. Alors $\left(\text{E'}\right)$ est du 2e degré et le nombre de solutions dépend deu discriminant : $\Delta=4m^{2}+4\left(m-2\right)=4\left(m^{2}+m-2\right)=4\left(m-1\right)\left(m+2\right)$

Le signe des racines de $\left(\text{E'}\right)$ dépend de leur produit et de leur somme :

$$\begin{cases} P=\dfrac{-1}{m-2}=\dfrac{1}{2-m} \\ S=\dfrac{-2m}{m-2}=\dfrac{2m}{2-m} \end{cases}$$

m	$-\infty$	-2		0		1		2	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
P	$+$	$+$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$	$+$	$\times$	$-$
S	$-$	$-$	$\times$	$\times$	$\times$	$+$	$+$	$\times$	$-$
Nombre et signe des racines de $\left(\text{E'}\right)$	2 $-,-$	1 $-$	0	0	0	1 $+$	2 $+,+$	1 $+$	2 $+,-$
Nombre de racines de $\left(\text{E}\right)$	0	0	0	0	0	1	2	1	1

Ce tableau résume tous les cas !

Question 3

(1) $\log_3\left(3^x-2\right)+x\leq\log_9 225$

2) $\log_3 (3^x-2) + x \leq \log_9 225$

C.E. : $3^x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x > \log_3 2$

$\forall x \in D = \left]\frac{\ln 2}{\ln 3} ; +\infty\right[$, $\qquad \left(\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63\right)$

$\log_3 (3^x - 2) + x \leq \log_9 225$

$\Leftrightarrow \log_3 (3^x - 2) + \log_3 3^x \leq \frac{\log_3 225}{\log_3 9}$

$\Leftrightarrow \log_3 3^x(3^x - 2) \leq \frac{1}{2} \cdot \log_3 225$

$\Leftrightarrow \log_3 (3^{2x} - 2 \cdot 3^x) \leq \log_3 15$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 15 \leq 0 \qquad$ poser : $y = 3^x$

$\Leftrightarrow y^2 - 2 \cdot y - 15 \leq 0 \qquad \Big(\Delta = 4 + 15 \cdot 4 = 64$

$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 5 \qquad y_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \quad y_2 = \frac{2+8}{2} = 5\Big)$

On revient à x : $-3 \leq 3^x \leq 5$

$\Leftrightarrow 3^x \leq 5 \quad \Leftrightarrow x \leq \log_3 5$

Donc : $S = \left]\log_3 2 , \log_3 5\right]$

(2) $\log_{\frac{1}{9}}\left(3x-x^2\right)+\log_9\left|x-1\right|\leq\log_3\frac{1}{x}$

$\log_{\frac{1}{9}} (3x - x^2) - \log_3 \frac{1}{x} + \log_9 |x-1| \leq 0$

CE : 1) $3x - x^2 > 0 \qquad$ 2) $x > 0 \qquad$ 3) $x \neq 1$

$x(3-x > 0$

$x \in]0,3[$

$D_{ex} =]0,1[\cup]1,3[$

$\frac{\ln (3x-x^2)}{-2\ln 3} - \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln 3} + \frac{\ln|x-1|}{2\ln 3} \leq 0 \qquad | \cdot 2\ln 3 > 0$

$-\ln (3x - x^2) + 2\ln x + \ln|x-1| \leq 0$

$\ln x^2 + \ln|x-1| \leq \ln (3x - x^2)$

$x^2 |x-1| \leq x(3-x) \qquad | : x > 0$

$x|x-1| \leq 3 - x$

1^{er} cas : $0 < x < 1$

$$-x(x-1) \le 3-x$$
$$-x^2+x \le 3-x$$
$$-x^2+2x-3 \le 0 \qquad \Delta < 0$$
tj vrai

2^e cas : $1 < x < 3$

$$x(x-1) \le 3-x$$
$$x^2 - \cancel{x} \le 3 - \cancel{x}$$
$$x^2 \le 3$$
$$|x| \le \sqrt{3}$$
$$x \in \,]1, \sqrt{3}]$$
$$S = \,]0,1[\, \cup \,]1, \sqrt{3}]$$

Question 4

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\log_3 x + \log_{0,5}\left(x+1\right)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{\log_3 x}_{\to+\infty} + \underbrace{\log_{0,5}(x+1)}_{\to-\infty} \Big) \quad \text{f.i. } \text{"}\infty-\infty\text{"}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\log_3 x}_{\to+\infty} \cdot \Big(1 + \underbrace{\frac{\log_{0,5}(x+1)}{\log_3 x}}_{\to -\frac{\ln 3}{\ln 2}} \Big) \quad \approx -1{,}58$$

$$= -\infty$$

en effet, $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_{0,5}(x+1)}{\log_3 x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)\cdot \ln 0{,}5}}{\frac{1}{x \ln 3}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} \cdot \frac{-\ln 3}{\ln 2} = \frac{-\ln 3}{\ln 2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \underbrace{\big(\underbrace{2^{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}_{\to 1} - 1\big)}_{\to 0} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2^{\frac{1}{x}} - 1}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} \quad \text{f.i.}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right) \cdot \ln 2}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{2^{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}_{\to 1} \cdot \ln 2$$

$$= \ln 2.$$

On peut aussi faire le changement de variables :

$$\frac{1}{x} = y$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{2^y - 1}{y}$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{(H)}{=}} \lim_{y\to 0^+} \frac{2^y \cdot \ln 2}{1} = \ln 2$$