

## Question 1

35 (=4+3+6+3+3+6+5+5) points

Déterminer les primitives suivantes sur un intervalle bien choisi :

$$(1) \int \frac{(5x-1)^2}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{25x^2 - 10x + 1}{2x^{1/2}} dx \\
 &= \int \frac{25}{2} x^{3/2} - 5x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{-1/2} dx \\
 &= \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} - 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot x^{1/2} + k \\
 &= 5x^2 \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \sqrt{x} + \sqrt{x} + k \\
 &= \sqrt{x} \left( 5x^2 - \frac{10}{3} x + 1 \right) + k, \text{ sur } \mathbb{R}_+^*
 \end{aligned}$$

$$(2) \int \tan x \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tan x dx + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \\
 &\quad \left( \begin{array}{l} u = \cos x \\ u' = -\sin x \end{array} \quad \begin{array}{l} v = \tan x \\ v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right) \\
 &= -\ln |\cos x| + \frac{\tan^2 x}{2} + k \\
 &\text{sur un intervalle } I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}
 \end{aligned}$$

$$(3) \int x^2 \sqrt{3-x} dx \quad (\text{Faire la substitution : } y = 3-x.)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (3-y)^2 \sqrt{y} (-dy) \quad \text{On pose : } y = 3-x \Leftrightarrow x = 3-y \\
 &= \int -9y^{1/2} + 6y^{3/2} - y^{5/2} dy \quad dy = -dx \Leftrightarrow dx = -dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -9 \frac{2}{3} y^{3/2} + 6 \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} + k \\
&= y^{3/2} \left( -6 + \frac{12}{5} y - \frac{2}{7} y^2 \right) + k \\
&= -\frac{2}{35} y^{3/2} (105 - 42y + 5y^2) + k \\
&= -\frac{2}{35} (3-x)^{3/2} (105 - 42(3-x) + 5(9-6x+x^2)) + k \\
&= -\frac{2}{35} (3-x)^{3/2} (105 - 126 + 42x + 45 - 30x + 5x^2) + k \\
&= -\frac{2}{35} (3-x)^{3/2} (5x^2 + 12x + 24) + k, \text{ sur } ]-\infty; 3]
\end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{2}{x \sqrt{\ln(3x)}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int u' u^{-1/2} dx & \text{C.E: } \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln(3x) > 0 \end{cases} \\
&= 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot u^{1/2} + k & \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow x > 1/3 \\
&= 4 \sqrt{\ln(3x)} + k & \left( \begin{array}{l} u = \ln(3x) = \ln x + \ln 3 \\ u' = \frac{1}{x} \end{array} \right) \\
&\text{sur } ]1/3; +\infty[
\end{aligned}$$

$$(5) \int \frac{x^2 + 2}{(x^3 + 6x)^4} dx \quad \begin{array}{l} u = x^3 + 6x \\ u' = 3x^2 + 6 = 3(x^2 + 2) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \frac{u'}{u^4} dx & \text{C.E: } \begin{array}{l} x^3 + 6x \neq 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 6) \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq 0 \end{array} \\
&= \frac{1}{3} \frac{u^{-3}}{-3} + k \\
&= -\frac{1}{9(x^3 + 6x)^3} + k, \\
&\text{sur un intervalle } I \subset \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

$$(6) \left( \int e^x \sin(4x) dx \right) = F(x)$$

$$= -\frac{1}{4} e^x \cos(4x) + \frac{1}{4} \int e^x \cos(4x) dx \quad \begin{array}{l} u = e^x \\ u' = e^x \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = \sin(4x) \\ v = -\frac{1}{4} \cos(4x) \end{array}$$

$$= -\frac{1}{4} e^x \cos(4x) + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} e^x \sin(4x) - \frac{1}{4} F(x) \right] \quad \begin{array}{l} w' = \cos(4x) \\ w = \frac{1}{4} \sin(4x) \end{array}$$

D'où :

$$F(x) + \frac{1}{16} F(x) = -\frac{1}{4} e^x \cos(4x) + \frac{1}{16} e^x \sin(4x) + k$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} F(x) = -\frac{1}{4} e^x \cos(4x) + \frac{1}{16} e^x \sin(4x) + k$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{17} e^x \left( -4 \cos(4x) + \sin(4x) \right) + k',$$

sur  $\mathbb{R}$

$$(7) \int \frac{2x-3}{\sqrt{9-25x^2}} dx$$

$$= \int \frac{2x}{\sqrt{9-25x^2}} dx - \int \frac{3}{\sqrt{9-25x^2}} dx \quad \begin{array}{l} \text{C.E.: } 9-25x^2 > 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{l} u = 9-25x^2 \\ u' = -50x \end{array} \right)$$

$$= -\frac{1}{25} \int u' u^{-1/2} dx - \frac{3}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{5x}{3})^2}} dx$$

$$= -\frac{2}{25} \sqrt{9-25x^2} - \frac{3}{5} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{5x}{3}\right) + k,$$

sur  $\left]-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right[$

(8)  $\int \frac{x-7}{x^2-2x-3} dx$  (Déterminer d'abord deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{x-7}{x^2-2x-3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{x-7}{x^2-2x-3} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} \\ &= \frac{a(x-3) + b(x+1)}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{(a+b)x - 3a + b}{(x+1)(x-3)} \end{aligned}$$

D'où le système :  $\begin{cases} a+b=1 \\ -3a+b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

Donc :  $\int \frac{x-7}{x^2-2x-3} dx = 2 \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-3} dx$

$$= 2 \ln|x+1| - \ln|x-3| + k$$

sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

## Question 2

3 points

Déterminer la primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction

$$f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1},$$

qui prend la valeur  $\ln 2$  pour  $x = \ln 3$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx \quad \left( \begin{array}{l} u = e^x - 1 \\ u' = e^x \end{array} \right) \\ &= \ln|e^x - 1| + k \\ &= \ln(e^x - 1) + k \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

$F(\ln 3) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^{\ln 3} - 1) + k = \ln 2 \Leftrightarrow k = 0$

Donc :  $F(x) = \ln(e^x - 1)$  est la primitive cherchée.

### Question 3

17 (=7+4+2+4) points

On considère la fonction  $f: x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$

(1) Déterminer le domaine de définition de  $f$  et étudier l'existence d'asymptotes au graphe de  $f$ .

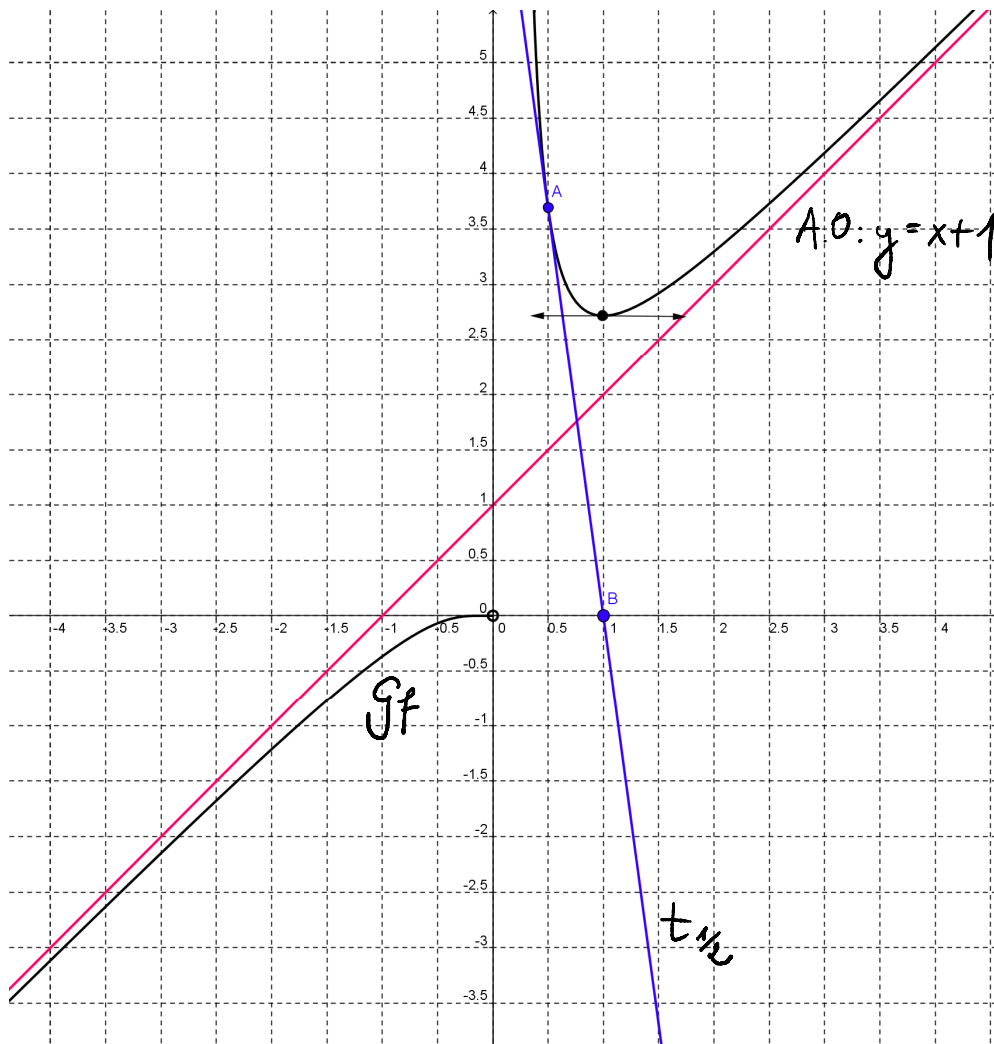
$\text{dom } f = \mathbb{R}^*$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x e^{\frac{1}{x}}) \xrightarrow{\frac{0}{\infty}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{1} = +\infty$   
 $\Rightarrow \text{A.V. : } x=0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x e^{\frac{1}{x}}) \xrightarrow{\frac{0}{0}} 0 \cdot 0 = 0$   
 $\Rightarrow \text{point creux } (0,0)$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\pm\infty \cdot 1} \pm\infty \Rightarrow \text{pas d'A.H.}$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$   
 Donc: A.O:  $y = x + 1$  (à droite et à gauche)

(2) Déterminer la dérivée de  $f$  et dresser le tableau de variation.

$\text{dom } f' = \mathbb{R}^*$   
 $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x}$   
 $f'(x)$  a le signe de  $(x-1) \cdot x$  (sur  $\mathbb{R}^*$ )  
 D'où le TV:

$x$	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		+		-		+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$		$e$		$+\infty$

- (3) Représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthonormé.



- (4) Déterminer et représenter graphiquement la ou les tangentes au graphe de  $f$  passant par le point  $B(1,0)$ . Donner également les points de contact de ces tangentes avec  $\mathcal{G}_f$ .

Soit  $t_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$  la tangente cherchée.  
 $B(1,0) \in t_a \Leftrightarrow 0 = f'(a) \cdot (1-a) + f(a)$   
 $\Leftrightarrow 0 = \frac{e^{1/a}(a-1)}{a} (1-a) + e^{1/a} \cdot a \quad / \cdot (ae^{-1/a})$   
 $\Leftrightarrow 0 = -(a-1)^2 + a^2 \quad a \neq 0$   
 $\Leftrightarrow 0 = 2a - 1 \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Donc le point de contact est  $A(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2})$  et  
l'unique tangente solution au problème est:  
 $t_{1/2} \equiv y = -e^2(x - \frac{1}{2}) + \frac{e^2}{2}$   
 $\Leftrightarrow y = -e^2x + e^2$  (voir figure)

# Question 4

5 points

Résoudre l'inéquation suivante dans  $\mathbb{R}$  :

$$\log_x \sqrt{1-x} + \log_{x^2} (x+5) \geq 0$$

C.E. : 1)  $x > 0$  et  $x \neq 1$   
 2)  $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$   
 3)  $x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

$\forall x \in \mathbb{D} = ]0; 1[$

$$\log_x \sqrt{1-x} + \log_{x^2} (x+5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \sqrt{1-x}}{\ln x} + \frac{\ln (x+5)}{\ln x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{\ln (1-x)}{\ln x} + \frac{\ln (x+5)}{2 \ln x} \geq 0 \quad | \cdot 2 \cdot \frac{\ln x}{\ln x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln (-x^2 - 4x + 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$\mathcal{S} =$

$$= [-2 + 2\sqrt{2} ; 1[$$

$\Delta = 32$   
 $x_1 = -2 - 2\sqrt{2} < 0$   
 $x_2 = -2 + 2\sqrt{2} \approx 0,83$

G. Lorang