Nom : .... Prénom : ....

1B | Devoir de mathématiques II,2 | 25.03.2011

1B Devoir de mathématiques II,2 25.03.2011

1re partie : 30 points - 50 minutes

Question 1 — 6 points

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que la fonction

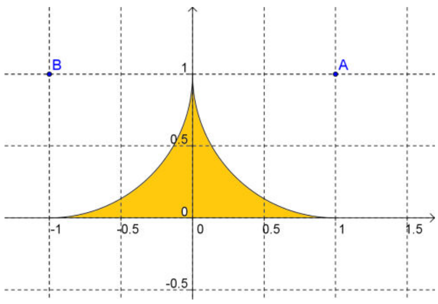
$$F : x \mapsto \int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée est f.

Question 2 — 15 (=7+8) points

(1) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-4x}\cdot e^x$. Etant donné un réel ***strictement négatif*** a, calculer le volume $V(a)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ $(a < 0)$ et $x = 0$. Calculer ensuite $\lim\limits_{a\to-\infty} V(a)$.

(2) On considère la surface du plan délimitée par les deux quarts de cercle de centres respectifs $A(1,0)$ et $B(-1,0)$ et de rayons 1 et l'axe des abscisses. Déterminer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation autour de l'axe des abscisses de cette surface.



Question 3 — 9 (=5+4) points

Calculer :

(1) $\int e^{2x}\,\mathrm{Arctan}\left(e^{x+1}\right)\mathrm{d}x$ (Indication : poser : $e^{x+1} = t$)

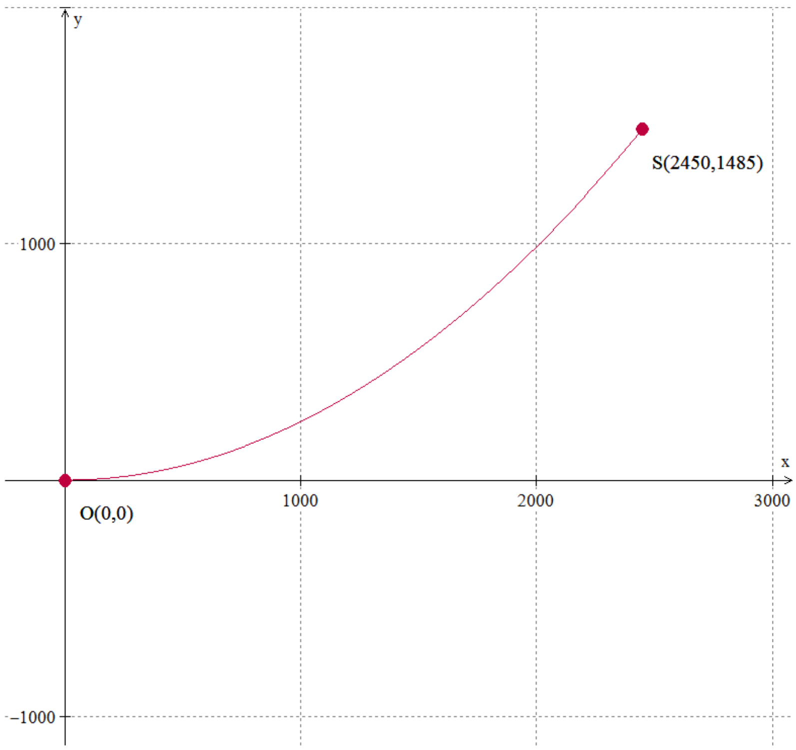
(2) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ (Indication : poser $x = \frac{1}{t}$.)

2e partie : Problème V200 (30 points - 70 minutes)

***Avertissement** : la correction tiendra compte du soin apporté aux raisonnements, aux justifications et à la rédaction de la copie !*

Galilée pensa à tort que la chaînette était une parabole. La chaînette est la courbe qu'on peut admirer en tenant un collier par ses extrémités ou en observant, de nos jours, les câbles électriques à haute tension suspendus entre deux puissants pylônes. Aujourd'hui on sait que cette courbe est décrite par une expression exponentielle (cf. fonction g, question 5).Quelle est l'importance de l'erreur commise en prenant une parabole au lieu de la courbe exacte ? L'exemple suivant permettra de conclure.

Le câble d'un téléphérique relie la station gare O qui se trouve à une altitude de 2'310 m à la station sommet S qui se trouve à une altitude de 3'795 m. Sur une carte topographique à l'échelle 1:25'000 la ***distance horizontale*** entre O et S mesure 9,8 cm. Le câble sort de la station ***tangentiellement*** à l'horizontale. L'unité de longueur est le mètre.



(1) Montrer que dans un repère orthonormé d'origine O le point S a les coordonnées (2'450, 1'485).

(2) Soit l la longueur du câble. En utilisant des raisonnements géométriques élémentaires, déterminer deux réels $l_{\min}$ et $l_{\max}$ tels que $l_{\min} < l < l_{\max}$.

(3) En supposant que le câble du téléphérique pend suivant la forme d'une parabole, déterminer une fonction f qui correspond à la courbe décrite par le câble du téléphérique qui relie la gare O au sommet S.

(4) Calculer la longueur l_f du câble entre O et S pour la fonction f à 1/10 de mètre près et vérifier que $l_{\min} < l_f < l_{\max}$.

Rappel : la longueur du graphe d'une fonction dérivable f entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est donnée par l'intégrale :

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x .$$

(5) Sachant qu'un câble suspendu en deux points fixes décrit une courbe $\mathcal{C}_g$, appelée chaînette et telle que :

$$g(x) = a^{-1}\left(e^{ax-ab} + e^{ab-ax} + c\right),$$

déterminer a, b et c pour que la fonction g corresponde à la courbe décrite par le câble entre O et S.

(6) Calculer la longueur l_g du câble entre O et S pour la fonction g et vérifier que $l_{\min} < l_g < l_{\max}$.

(7) Quelle est l'erreur relative sur la longueur que l'on commet en remplaçant la chaînette par une parabole dans cet exemple ?

(8) Déterminer la différence maximale entre les fonctions f et g sur [0,2'450] en raisonnant analytiquement.

(D'après examen de fin d'études secondaires, juin 2010)