Nom : ....   Prénom : ....

1B   Devoir de mathématiques I,1   14.10.2013

Durée : 100'   ***Calculatrice autorisée***

Question 1 — 12 (=4+4+4) points

(1) ***Compléter*** et ***démontrer*** : $(\forall a \in ...)(\forall x \in ...)(\forall r \in ...)$ $\quad \log_a x^r = ...$

(2) ***Expliquer*** et ***démontrer*** la propriété disant que la ***dérivée*** de toute fonction exponentielle $\exp_a$ en est un multiple.

(3) Enoncer et démontrer la ***propriété fondamentale*** de la fonction $\log_a$.

Question 2 — 14(=7+7) points

(1) Soit x un réel > 0, on pose $\log_5 x = u$. Exprimer en fonction de u :

a) $\log_{25} \sqrt{x^3}$ b) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{625x}$ c) $\log_x \frac{1}{125^7}$

(2) Soit $p = \ln 2$ et $q = \ln 3$. Exprimer en fonction de p et de q :

a) $\ln 24e^2$ b) $\ln^2 36\sqrt{e}$ c) $\frac{\log_3 16}{\log_2 27}$

Question 3 — 18 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes après avoir donné les conditions d'existence si nécessaire :

(1) $\log_5 x\sqrt{x} = -3$

(2) $(x+1)^3 \leq -2$

(3) $3^{4x+1} > 2$

(4) $7^{x^3-x^2} < -1$

(5) $\log^2 \frac{1}{x} \leq 2$

(6) $3 \cdot 81^{x^2} \leq 9^{x^4}$

(7) $\log_2^2(x+2) - \log_2(x+2)^2 = 8$

Question 4 (juin 2011) — 16 points

On donne la fonction f définie par : $f(x) = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}$.

Etudier f : a) domaines d'existence et de continuité, b) limites aux bornes du domaine, c) asymptotes et branches paraboliques, d) dérivée et variations, e) concavité et points d'inflexions, f) équation de la tangente t_1 au point d'abscisse 1, g) représentation graphique dans un repère orthonormé (unité = 1 cm) de la fonction et de la tangente t_1.

G. Lorang