1B Corrigé du devoir de mathématiques I, 1

Question 1 voir cours

Question 2

(1) a) $\log_{25}\sqrt{x^3} = \frac{\log_5 x^{3/2}}{\log_5 25} = \frac{3/2 \log_5 x}{\log_5 5^2}$

$= \frac{3/2\, u}{2} = \frac{3u}{4}$

b) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{625x} = \frac{\log_5 (5^4 x)^{1/3}}{\log_5 \sqrt{5}}$

$= \frac{\log_5 5^{4/3} + \log_5 x^{1/3}}{\log_5 (\sqrt{5})}$

$= \frac{4/3 + 1/3\, u}{1/2}$

$= \frac{8}{3} + \frac{2}{3}u$

c) $\log_x \frac{1}{125^7} = \log_x 5^{-21}$

$= -21 \log_x 5$

$= -21 \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = -\frac{21}{u}$

(2) a) $\ln(24e^2) = \ln(2^3 \cdot 3 \cdot e^2)$

$= 3\ln 2 + \ln 3 + 2\ln e$

$= 3p + q + 2$

b) $\ln^2(36\sqrt{e}) = \left(\ln 2^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{e}\right)^2$

$= \left(2 \ln 2 + 2 \ln 3 + \frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(2p + 2q + \frac{1}{2}\right)^2$

c) $\dfrac{\log_3 16}{\log_2 27} = \dfrac{\log_3 2^4}{\log_2 3^3}$

$= \dfrac{4 \log_3 2}{3 \log_2 3}$

$= \dfrac{4 \, \frac{\ln 2}{\ln 3}}{3 \, \frac{\ln 3}{\ln 2}} = \dfrac{4 \ln^2 2}{3 \ln^2 3} = \dfrac{4p^2}{3q^2}$

Question 3

(1) $\log_5 x\sqrt{x} = -3$ C.E: $x > 0$

$D = \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \quad x\sqrt{x} = 5^{-3}$

$\Leftrightarrow \quad x^{3/2} = 5^{-3}$

$\Leftrightarrow \quad x = 5^{-\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}}$

$\Leftrightarrow \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\underline{S = \left\{\frac{1}{25}\right\}}$

(2) $(x+1)^3 \leq -2$ $D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x + 1 \leq -\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -1 - \sqrt[3]{2}$

$\underline{S = \left]-\infty, -1 - \sqrt[3]{2}\right]}$

(3) $3^{4x+1} > 2$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4x+1 > \log_3 2$

$\Leftrightarrow 4x > \log_3 2 - 1$

$\Leftrightarrow x > \frac{\log_3 2 - 1}{4}$

$S = \left] \frac{\log_3 2 - 1}{4} ; +\infty \right[$

(4) $\underbrace{7^{x^3-x^2}}_{>0} < -1$, impossible $S = \emptyset$

(5) $\log^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$ $\qquad$ C.E $x > 0$

$D = \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \log \frac{1}{x} \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 10^{-\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x} \leq 10^{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 10^{\sqrt{2}} \geq x \geq 10^{-\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 10^{-\sqrt{2}} \leq x \leq 10^{\sqrt{2}}$

$S = [10^{-\sqrt{2}} ; 10^{\sqrt{2}}]$

(6) $3 \cdot 81^{x^2} \leq 9^{x^4}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{4x^2} \leq 3^{2x^4}$

$\Leftrightarrow 3^{4x^2+1} \leq 3^{2x^4}$

$\Leftrightarrow 4x^2+1 \leq 2x^4$

$\Leftrightarrow 2x^4 - 4x^2 - 1 \geq 0$

Posons: $y = x^2$

$\rightsquigarrow 2y^2 - 4y - 1 \leq 0$

$\Delta = 16 + 8 = 24$

$y_1 = \frac{4 - \sqrt{24}}{4} = 1 - \frac{2\sqrt{6}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (< 0)$

$y_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (> 0)$

y	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$2y^2-4y-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $y \leq 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $y \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Revenons à x :

$\underbrace{x^2 \leq 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}}_{\text{impossible}}$ ou $x^2 \geq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\iff x \geq \sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{2}}$ ou $x \leq -\sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{2}}$

$S = \left]-\infty ; -\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{2}} ; +\infty\right[$

(7) $\log_2^2(x+2) - \log_2(x+2)^2 = 6$

C.E : $x+2 > 0 \iff x > -2$

$D =]-2 ; +\infty[$

Posons : $y = \log_2(x+2)$

$\rightsquigarrow y^2 - 2y = 8$

$\iff y^2 - 2y - 8 = 0$

$\iff y = 4$ ou $y = -2$

$S = \left\{14, -\frac{7}{4}\right\}$

Revenons à x :

$\log_2(x+2) = 4$ ou $\log_2(x+2) = -2$

$\iff x+2 = 2^4$ ou $x+2 = 2^{-2}$

$\iff x = 14$ ou $x = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$