

*Durée : 100'**Calculatrice autorisée***Question 1****11 (=4+7) points**

- (1) Énoncer et démontrer le lien entre logarithmes de bases différentes. (On ne demande pas les trois cas particuliers.)
- (2) Compléter et démontrer :
- a) $(\forall x \in \dots\dots\dots)$ $(\ln x)' = \dots\dots\dots$
- b) $(\forall a \in \dots\dots\dots)(\forall x \in \dots\dots\dots)$ $(\log_a x)' = \dots\dots\dots$
- c) $(\forall a \in \dots\dots\dots)(\forall x \in \dots\dots\dots)$ $(a^x)' = \dots\dots\dots$

Question 2**30 (=17+2+6+2+3) points**On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sqrt{-\ln x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - e^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (1) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f . Étudier en particulier la continuité et la dérivabilité en 0 et en 1 de f . Préciser la nature du point d'abscisse 1 du graphe \mathcal{G}_f .
- (2) Étudier l'existence d'asymptotes au graphe de f .
- (3) Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation.
- (4) Établir une équation de la tangente à \mathcal{G}_f au point d'abscisse $1/e$. **N.B.** On demande les valeurs exactes du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.
- (5) Représenter \mathcal{G}_f et ses demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 dans un repère orthonormé du plan en choisissant comme unité sur les axes 3 cm.

Question 3**19 (=9+10) points**

- (1) Résoudre dans \mathbb{R} après avoir précisé les conditions d'existence éventuelles :
- a) $\ln\left(3 - 2\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)\right) \leq 0$ b) $-e^{2x - \ln(\frac{1}{3})} + 5 < -e^{x + \ln 2}$
- (2) Calculer : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x})^x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \text{Arcsin}(2x))^{\frac{4-\frac{3}{x}}{x}}$.