

*Durée : 120'**Calculatrice autorisée***Question 1****30 (=10+10+10) points**(1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a)  $\log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2) - \log_2 \frac{1}{x} + \log_4 |x - 1| = 0$  (sept. 2003)

b)  $\log_{x-2}(x + 4) + \frac{1}{\log_{x-3}(x - 2)} \leq 2 - \log_{x-2} 2$  (sept. 2002)

(2) Déterminer le **nombre** de solutions de l'équation :  $e^{2x} - me^x = 1 - m$ , où  $m$  est un paramètre réel.**Question 2****12 (=6+6) points**On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 

- (1) Etudier  $f$  : a) domaines de définition, de continuité et de dérivabilité, b) parité, c) limites aux bornes du domaine et asymptotes éventuelles, d) dérivée et sens de variation.
- (2) Est-ce que  $f$  est une fonction bijective ? Si oui, déterminer sa bijection réciproque  $f^{-1}$ ,  $\text{dom } f^{-1}$  et  $\text{Im } f^{-1}$ .

**Question 3****18 (=2+3+4+5+4) points**On considère la fonction  $f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 

- (1) Quel est le domaine de  $f$  ? Est-ce que  $f$  est paire ou impaire ? **Indication** : calculer  $f(2)$  et  $f(-2)$ .
- (2) Etudier la continuité de  $f$  en 0 et en déduire le domaine de continuité de  $f$ .
- (3) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes du domaine et en déduire les asymptotes éventuelles au graphe de  $f$ .
- (4) Déterminer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ , puis étudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Quel est la nature du point d'abscisse 0 du graphe de  $f$  ? Quel est le domaine de dérivabilité de  $f$  ?
- (5) Etudier le sens de variation de  $f$  sur son domaine et dresser son tableau de variation.