Nom : .... Prénom : ....

1B | Corrigé du devoir I,3 | 13.12.2013

Question 1

(1) a) C.E : 1) $3x-x^2>0 \Leftrightarrow x\left(3-x\right)>0 \Leftrightarrow x \in]0,3[$

2) $x>0$

3) $x \neq 1$

Donc le domaine de l'équation est : $D=\left]0,3\right[\setminus\left\{1\right\}$

$\left(\forall x \in D\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{4}}\left(3x-x^2\right)-\log_2\frac{1}{x}+\log_4\left|x-1\right|=0\\
&\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(3x-x^2\right)}{-2}+\log_2 x+\frac{\log_2\left|x-1\right|}{2}=0 \qquad\qquad / \cdot 2\\
&\Leftrightarrow \log_2 x^2+\log_2\left|x-1\right|=\log_2\left(3x-x^2\right)\\
&\Leftrightarrow \log_2\left(x^2\left|x-1\right|\right)=\log_2\left(3x-x^2\right)\\
&\Leftrightarrow x^2\left|x-1\right|=x\left(3-x\right) \qquad\qquad / : x>0\\
&\Leftrightarrow x\left|x-1\right|=3-x
\end{aligned}
$$

Si $x>1$ alors l'équation devient :

$$x\left(x-1\right)=3-x \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \text{ ou } \underbrace{x=-\sqrt{3}}_{\text{à écarter, } \notin D}$$

Si $x<1$ alors l'équation devient :

$$x\left(1-x\right)=3-x \Leftrightarrow x^2-2x+3=0 \text{ impossible car } \Delta=8-12<0$$

Donc : $S=\left\{\sqrt{3}\right\}$

b) C.E. : 1) $x>2$ et $x\neq 3$

2) $x>-4$

3) $x>3$ et $x\neq 4$

4) $x-2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 3$

Donc : $D=\left]3,+\infty\right[\setminus\left\{4\right\}$

$\left(\forall x \in D\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\log_{x-2}\left(x+4\right)+\frac{1}{\log_{x-3}\left(x-2\right)}\leq 2-\log_{x-2}2\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln\left(x+4\right)}{\ln\left(x-2\right)}+\frac{\ln\left(x-3\right)}{\ln\left(x-2\right)}\leq\frac{2\ln\left(x-2\right)}{\ln\left(x-2\right)}-\frac{\ln\left(2\right)}{\ln\left(x-2\right)} \qquad / \cdot \ln\left(x-2\right)>0 \text{ car } x>3\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(x+4\right)\left(x-3\right)\right)\leq \ln\frac{\left(x-2\right)^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x-12\right) \leq x^2-4x+4$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-28 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -3-\sqrt{37} \leq x \leq -3+\sqrt{37}$$

Donc : $S = \left]3, -3+\sqrt{37}\right]$

(2) Appelons (E) l'équation en x : $e^{2x} - me^{x} = 1-m$.

On pose $y = e^x > 0$, alors l'équation (E) devient :

$$y^2 - my + \left(m-1\right) = 0 \qquad (*)$$

Cette équation est ***toujours*** du second degré, indépendamment du paramètre m. Donc on peut calculer son discriminant :

$$\Delta = m^2 - 4\left(m-1\right) = m^2-4m+4 = \left(m-2\right)^2 \geq 0$$

L'équation $(*)$ admet donc toujours au moins une solution.

Pour étudier le signe de ces racines, on calcule leur produit et leur somme :

$$P = m-1 \text{ et } S = m$$

m	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
Δ	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
P	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
S	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Nombre et signe des sol. de $(*)$	2 racines de signes opp : $y_1 < 0$ et $y_2 > 0$			$y_1 = 0$ $y_2 > 0$	2 racines $y_1 > 0$, $y_2 > 0$	1 racine $y_1 > 0$	2 racines $y_1 > 0$, $y_2 > 0$
Nombre de solutions de (E)	1			1	2	1	2

Solution alternative : On aurait pu facilement résoudre l'équation et en déduire le nombre de solutions dans tous les cas. En effet, les solutions de l'équation (*) sont :

$$y_1 = \frac{m-\left(m-2\right)}{2} = 1 \text{ et } y_2 = \frac{m+m-2}{2} = m-1$$

On revient à x :

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou}$$
$$e^x = m-1 \Leftrightarrow x = \ln\left(m-1\right) \text{ seulement si } m > 1$$

Remarquons que a) la 2e équation n'a une solution que si $m > 1$ et b) si $m = 2$, les deux solutions sont confondues. D'où la discussion :

- si $m \leq 1$ ou $m = 2$ alors l'équation (E) admet 1 solution : $S = \left\{0\right\}$
- si $m > 1$ et $m \neq 2$ alors l'équation (E) admet 2 solutions : $S = \left\{0, \ln\left(m-1\right)\right\}$

Question 2

(1) a) $\mathcal{D}f = \mathbb{R} = \mathcal{D}_c f = \mathcal{D}f'$

b) $f\left(-x\right) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -f\left(x\right)$, donc f est impaire.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = +\infty$, donc pas d'A.H.D.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2x} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty$, donc pas d'A.O.D., mais une B.P.D de direction (Oy).

Comme $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à O, il n'y a pas non plus d'asymptote horizontale ou oblique à gauche $\mathcal{G}_f$, mais une B.P.G de direction (Oy).

d) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$ $f'\left(x\right) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$, donc f est une fonction strictement croissante.

(2) Comme f est strictement croissante, continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = -\infty$, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donc : $\operatorname{dom} f^{-1} = \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f^{-1} = \mathbb{R}$. Déterminons l'expression analytique de f^{-1} :

$\left(\forall y \in \mathbb{R}\right)$: $f\left(x\right) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 2y$

Posons : $e^{x} = u > 0$.

Alors l'équation (d'inconnue u) devient :

$$u - \frac{1}{u} = 2y \Leftrightarrow u^2 - 1 = 2yu \Leftrightarrow u^2 - 2yu - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$, donc l'équation en u admet toujours 2 solutions :

$$u_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0 \text{ et } u_2 = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$$

Donc en revenant à x :

$$e^{x} = u_1 \Leftrightarrow x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

Question 3

(1) Si $x \neq 0$, alors $f\left(x\right) = e^{x\ln|x|}$ existe, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$f\left(2\right) = 2^2 = 4$ et $f\left(-2\right) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, donc f n'est ni paire ni impaire.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln|x|} = 1 = f\left(0\right)$, donc f est continue en 0.

Calcul à part : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln|x|}{x^{-1}} \underset{(H)}{\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0} - x = 0$.

Il est clair que f est continue en tout réel distinct de 0.

Donc : $\mathcal{D}_c f = \mathbb{R}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty$, donc pas d'A.H.D.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$, donc pas d'A.O.D., mais une B.P.D. de direction (Oy).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln|x|} = 0$, donc $A.H.G.$: $y = 0$

(4) Rappelons que la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$. Donc :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \quad f'\left(x\right) = e^{x\ln|x|} \cdot \left(\ln|x| + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \underbrace{|x|^x}_{>0}\left(\ln|x| + 1\right).$$

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x - 0} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to} f'\left(x\right) = \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{x\ln|x|}}_{\to 1} \cdot \left(\underbrace{\ln|x|}_{\to-\infty} + 1\right) = -\infty$$

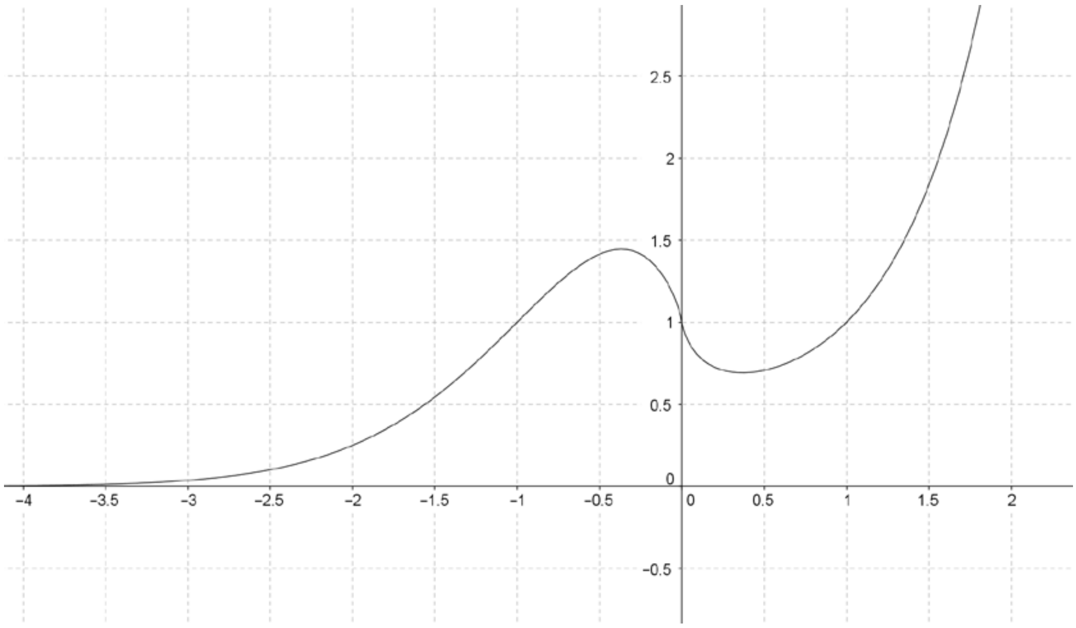
Donc f n'est pas dérivable en 0 et le point $\left(0,1\right)$ est un point d'inflexion à tangente verticale. $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}^*$.

(5) $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = e^{-1} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{e}$

En utilisant la parité du facteur $\ln|x| + 1$, on obtient aisément le signe de $f'\left(x\right)$ et donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f\left(x\right)$	0 ↗	$e^{1/e}$ M	↘	1	↘	$e^{-1/e}$ m	↗ $+\infty$

$$f\left(-e^{-1}\right) = \left(e^{-1}\right)^{-e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}} \cong 1,44 \qquad f\left(e^{-1}\right) = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}} \cong 0,69$$



2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2