Nom : .... Prénom : ....

1B1 Devoir de mathématiques II,1 24.01.2014

Durée : 100' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 4 points

Montrer que si F et G sont des primitives d'une fonction f sur un intervalle I inclus dans le domaine de f, alors il existe une constante C telle que $F\left(x\right)-G\left(x\right)=C$, pour tout $x\in I$.

Question 2 16 (=9+5+2) points

On considère la fonction

$$f: x\mapsto x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$$

(1) Préciser les domaines de définition et de continuité de f. Déterminer toutes les asymptotes au graphe de f. Etudier la position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à ces asymptotes.

(2) Calculer f' et en déduire le sens de variation de f. Préciser la nature du point A d'abscisse $\ln 3$ de $\mathcal{G}_f$ et calculer l'ordonnée de ce point.

(3) Esquisser le graphe de $\mathcal{G}_f$ dans un repère orthonormé du plan.

Question 3 30 points

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle I à préciser.

(1) $\int \left(x^3-x\right)\left(x^4-2x^2-5\right)^6\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}\left(4\sqrt{x}-1\right)}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{\left(e^{3x-1}-4e^{-2x}\right)^2}{e^{x+1}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{2}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \mathrm{Arcsin}\left(4x\right)\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{1+\sqrt{\ln\left|t\right|}}{2t}\,\mathrm{d}t$

(7) $\int \frac{x^2-4}{1-x}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \ln^2 u\,\mathrm{d}u$

(9) $\int \frac{2^x-2}{3^x}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{\ln x-4}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{x-3}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{v}{\sqrt{v-2}}\,\mathrm{d}v$

Nom : .... Prénom : ....

Question 4 — 10 (=4+6) points

(1) Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ sur $\left]1, 3\right[$ qui s'annule pour $x = 2$. ***Indication*** : Déterminer d'abord deux réels a et b tels que :

$$f\left(x\right) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

(2) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ sur son domaine (à préciser) et en déduire la primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en $x = 0$.

G. Lorang

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$