Nom : .... Prénom : ....

1B1 Corrigé du devoir II,1 24.01.2014

Question 1

Voir manuel.

Question 2

(1) $\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x\left(1+3e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\underbrace{1+3e^{-x}}_{\to 4}} = 4$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}-x+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(4-\frac{4e^x}{e^x+3}\right) = 0.$$

On en déduit que $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O.D : $\Delta : y = x-2$.

La position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à Δ est déterminée par le signe de :

$$\delta_1(x) = f(x)-(x-2) = 4-\frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{4e^x+12-4e^x}{e^x+3} = \frac{12}{e^x+3} > 0.$$

Donc $\mathcal{G}_f$ est toujours située au-dessus de Δ.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = \dfrac{0}{3} = 0$, donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+3} = 0.$$

On en déduit que $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O.G : $\Delta' : y = x+2$.

La position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à Δ' est déterminée par le signe de :

$$\delta_2(x) = f(x)-(x+2) = -\frac{4e^x}{e^x+3} < 0.$$

Donc $\mathcal{G}_f$ est toujours située en-dessous de Δ'.

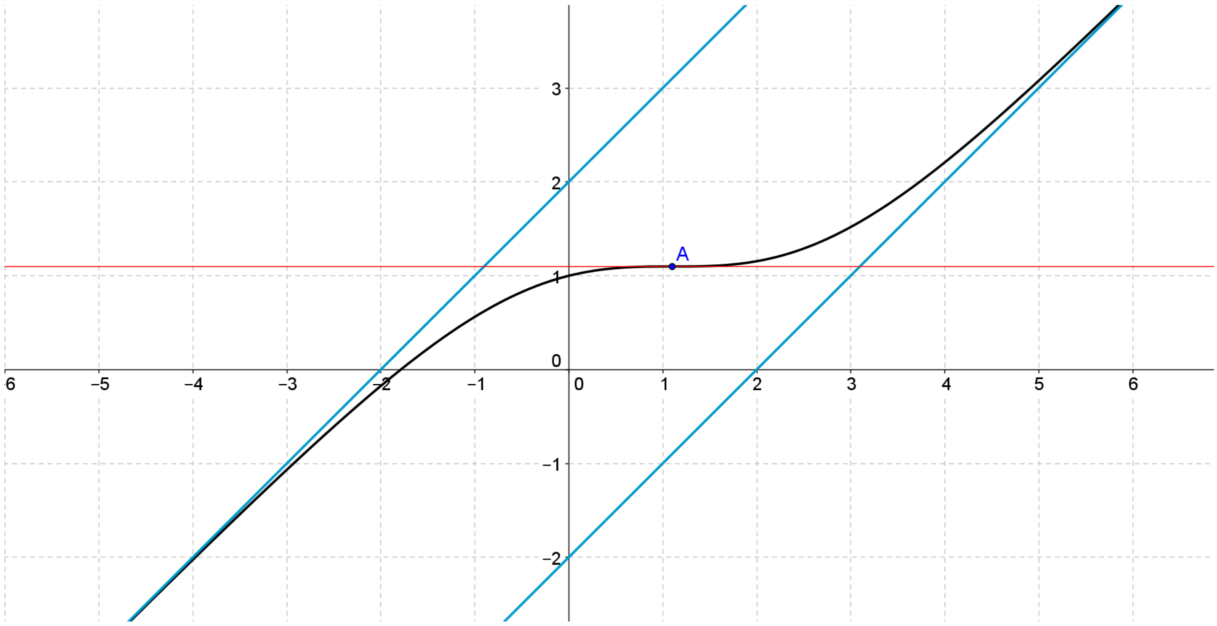
(2) $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{4e^x\left(e^x+3\right)-4e^xe^x}{\left(e^x+3\right)^2} \\ &= \frac{\left(e^x+3\right)^2-4e^{2x}-12e^x+4e^{2x}}{\left(e^x+3\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{\left(e^x + 3\right)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{\left(e^x + 3\right)^2}$$
$$= \frac{\left(e^x - 3\right)^2}{\left(e^x + 3\right)^2} \geq 0$$

Donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$, et si $x \neq \ln 3$, alors $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que le point $A(\ln 3, \ln 3)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale.

(3) Graphe :



Question 3

(1) $\int \left(x^3 - x\right)\left(x^4 - 2x^2 - 5\right)^6 \mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^4 - 2x^2 - 5 \\ u' = 4x^3 - 4x = 4\left(x^3 - x\right) \end{array}}$$

$$= \frac{1}{4}\int u' u^6 \mathrm{d}x = \frac{1}{28}\left(x^4 - 2x^2 - 5\right)^7 + k, \qquad \text{sur } I \subset \mathbb{R}.$$

(2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}\left(4\sqrt{x} - 1\right)} \mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 4\sqrt{x} - 1 \\ u' = \dfrac{4}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{array}}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{u'}{u} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left|4\sqrt{x} - 1\right| + k, \qquad \text{sur } I \subset \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{16}\right\}$$

(3) $$\int \frac{\left(e^{3x-1}-4e^{-2x}\right)^2}{e^{x+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(e^{6x-2}-8e^{3x-1-2x}+16e^{-4x}\right)e^{-x-1}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int e^{5x-3}-8e^{-2}+16e^{-5x-1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{5}e^{5x-3}-8e^{-2}x-\frac{16}{5}e^{-5x-1}+k$$

sur $I\subset\mathbb{R}$.

(4) $$\int\frac{2}{x^2-6x+9}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{2}{\left(x-3\right)^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{x-3}+k\,,\ \text{sur }\ I\subset\mathbb{R}\backslash\left\{3\right\}$$

(5) $$\int \mathrm{Arcsin}\left(4x\right)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} I.P.P.:f\left(x\right)=\mathrm{Arcsin}\left(4x\right) & f'\left(x\right)=\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}} \\ g'\left(x\right)=1 & g\left(x\right)=x \end{array}}$$

$$=x\,\mathrm{Arcsin}\left(4x\right)-\int\frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\,\mathrm{Arcsin}\left(4x\right)+\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+k$$

sur $I\subset\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

(6) $$\int\frac{1+\sqrt{\ln\left|t\right|}}{2t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{1}{2t}\mathrm{d}t+\int\frac{\sqrt{\ln\left|t\right|}}{2t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|t\right|+\frac{1}{3}\ln\left|t\right|\sqrt{\ln\left|t\right|}+k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln\left|t\right| \\ u'=\dfrac{1}{t}\end{array}}$$

sur $I\subset\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

(7) $$\int\frac{x^2-4}{1-x}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1}{1-x}-\frac{3}{1-x}\mathrm{d}x=\int -x-1+\frac{3}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x^2}{2}-x+3\ln\left|x-1\right|+k\,,\ \text{sur }\ I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$$

(8) $\int \ln^2 u \, \mathrm{d}u$

$$\boxed{\begin{array}{ll} I.P.P. : f\left(u\right) = \ln^2 u & f'\left(u\right) = 2\dfrac{\ln u}{u} \\ g'\left(u\right) = 1 & g\left(u\right) = u \end{array}}$$

$$= u\ln^2 u - 2\int \ln u \, \mathrm{d}u$$
$$= u\ln^2 u - 2\left(u\ln u - \int 1\mathrm{d}u\right)$$
$$= u\ln^2 u - 2u\ln u + 2u + k$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} I.P.P. : h\left(u\right) = \ln u & f'\left(u\right) = \dfrac{1}{u} \\ g'\left(u\right) = 1 & g\left(u\right) = u \end{array}}$$

sur $I \subset \mathbb{R}_+^*$

(9) $\int \dfrac{2^x - 2}{3^x} \mathrm{d}x$

$$\int \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 \cdot 3^{-x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + 2\frac{3^{-x}}{\ln 3} + k = \frac{1}{\ln 2 - \ln 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2 \cdot 3^{-x}}{\ln 3} + k$$

sur $I \subset \mathbb{R}$

(10) $\int \dfrac{\ln x - 4}{x \ln^2 x} \mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln t \\ u' = \dfrac{1}{t} \end{array}}$$

$$= \int \frac{1}{x}\ln^{-1}\left(x\right) - 4 \cdot \frac{1}{x}\ln^{-2} x \, \mathrm{d}x$$
$$= \ln\left|\ln x\right| + \frac{4}{\ln x} + k$$

sur $I \subset \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{1\right\}$

(11) $\int \dfrac{x - 3}{\sqrt{25 - x^2}} \mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{25 - x^2}} \mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} \mathrm{d}x$$

$$\boxed{u = 25 - x^2, u' = -2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} - 3\int \frac{1}{\sqrt{25\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)}} \mathrm{d}x$$

$$= -\sqrt{25 - x^2} - 3\int \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}} \mathrm{d}x = -\sqrt{25 - x^2} - 3\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{5} + k, \text{ sur } I \subset \left]-5, 5\right[$$

(12) $\displaystyle\int \frac{v}{\sqrt{v-2}}\,\mathrm{d}v$

$$= \int \frac{v-2}{\sqrt{v-2}}\mathrm{d}v + \int \frac{2}{\sqrt{v-2}}\mathrm{d}v$$
$$= \int \sqrt{v-2}\mathrm{d}v + \int 2\left(v-2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}v$$
$$= \frac{2}{3}\left(v-2\right)^{\frac{3}{2}} + 2\cdot 2\left(v-2\right)^{\frac{1}{2}} + k$$
$$= \left(v-2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}\left(v-2\right)+4\right] + k$$
$$= \frac{2}{3}\left(v+4\right)\sqrt{v-2} + k, \text{ sur } I \subset \left]2,+\infty\right[$$

Question 4

(1) Méthode des coefficients indéterminés :

$$\begin{aligned}
& f\left(x\right) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} = \frac{a\left(x-3\right)}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} + \frac{b\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} = \frac{ax-3a+bx-b}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)} = \frac{\left(a+b\right)x-3a-b}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}
\end{aligned}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $f\left(x\right) = -\dfrac{1}{2\left(x-1\right)} + \dfrac{1}{2\left(x-3\right)}$

Les primitives de f sont donc de la forme :

$F\left(x\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x-1\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(3-x\right) + k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3-x}{x-1} + k$, sur l'intervalle $\left]1,3\right[$.

$F\left(2\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3-2}{2-1} + k = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

Donc finalement, la primitive cherchée est :

$$F\left(x\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3-x}{x-1}$$

(2) C.E. : $x+\sqrt{x^2+1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$

Cette condition est trivialement vérifiée si $x \geq 0$, et si $x<0$ on a :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x^2+1}>-x\\ &\Leftrightarrow x^2+1>(-x)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+1>x^2\\ &\Leftrightarrow 1>0, \text{ vrai !}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}g=\mathcal{D}g'=\mathbb{R}$.

$$g'(x)=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$\begin{aligned}H(x)=\int h(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\ &=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+k\end{aligned}$$

On a : $H(0)=1 \Leftrightarrow \ln(0+1)-\sqrt{0+1}+k=1 \Leftrightarrow k=2$.

Doinc finalement :

$$H(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+2$$

G. Lorang