Nom : .... Prénom : ....

1B1 Devoir de mathématiques II,2 10.03.2014

Durée : 120' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 — 20 (=12+8) points

Soit la fonction f définie par :

$$f\left(x\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

(1) Etudier f : a) $\operatorname{dom} f$ et $\operatorname{dom}_c f$, b) limites aux bornes du domaine, asymptotes et branches paraboliques éventuelles, c) dérivée et tableau des variations (valeurs exactes des extréma éventuels), d) représentation graphique (unité 3 cm)

(2) Résoudre l'équation $f\left(x\right)=0$, puis déterminer la valeur exacte de la surface finie délimitée par $\mathcal{C}_f$ et (Ox). ***Indication*** : on intègrera par parties puis on décomposera la fraction rationnelle dans l'intégrale restante en éléments simples :

$$\frac{p\left(x\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{cx+d}{x^2+1},$$

où le polynôme p est du 3e degré et les constantes a, b, c et d sont à déterminer.

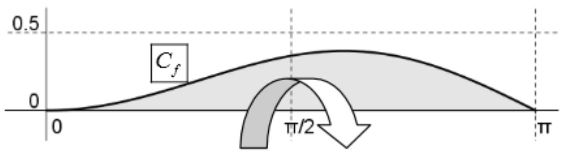
(Examen de fin d'études secondaires, juin 2013)

Question 2 — 10 points

Un flotteur (Schwimmer) a la forme d'un solide de révolution engendré par la rotation autour de (Ox) de la surface délimitée par (Ox) et le graphe de la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par

$$f\left(x\right)=\sin^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) \text{ (voir figure ci-dessous)}$$

Déterminer la valeur exacte du volume du flotteur en cm^3 sachant que l'unité est le cm.



(Examen de fin d'études secondaires, juin 2013)

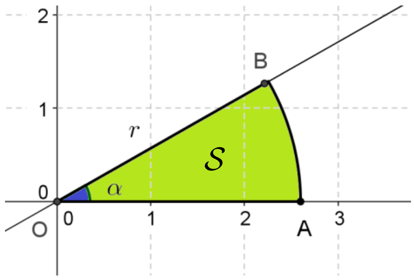
Question 3 — 9 points

Dans un repère orthonormé du plan, on donne le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(0,1)$ et de rayon $\sqrt{10}$ et la droite d d'équation $x+y+1=0$. On note $\mathcal{D}$ la partie du plan comprenant le point $(-1,-1)$ et délimitée par $\mathcal{C}$ et d. a) Faire une figure. b) Calculer la valeur exacte de l'aire de la surface $\mathcal{D}$. ***N.B.*** Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de d sont à déterminer par le calcul !

(Examen de fin d'études secondaires, septembre 2013)

Question 4 — 10 (=7+3) points

(1) Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de (Ox) le secteur circulaire circulaire $\mathcal{S}$ ci-contre, de centre O, de rayon r et de côtés $[OA]$ et $[OB]$ faisant un angle α avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. (***Indication*** : le résultat sera exprimé uniquement en fonction de r et de $\cos\alpha$.)



(2) En déduire ***sans calcul intégral*** :

a) le volume du solide de révolution de la question (1) en supposant cette fois-ci que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, et en faisant toujours tourner $\mathcal{S}$ autour de (Ox) (avec figure).

b) le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner le secteur circulaire $\mathcal{S}$ de la question (1) (avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) autour de l'axe des ordonnées.

Question 5 — 11 (=5+6) points

(1) Déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ qui s'annule en $x = \dfrac{\pi}{2}$ et préciser un intervalle sur lequel cette primitive existe. (On utilisera la substitution : $t = \tan\dfrac{x}{2}$.)

(2) On considère la fonction $g : x \mapsto (x+1)e^{-|x|}$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda > 0$. Calculer ensuite $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

(Examen de fin d'études secondaires, juin 2010)

G. Lorang