Nom : .... Prénom : ....

1B1 Corrigé du devoir II,2 10.03.2014

Question 1

(1)

a) $\underline{C.E.}\; x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f' = \left]-1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \underbrace{\boxed{\ln\left(\underbrace{\boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}}_{\to 0^+}\right)}}_{\to -\infty} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\boxed{\ln\left(\underbrace{\boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}}_{\to 0^+}\right)}}_{\to -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}}^{\to -\infty}}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to +\infty}} \underset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\frac{1(x^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x+1}{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = 0$$

C_f admet une $A.V.: x=-1$ et une $B.P.D.$ dont la direction asymptotique est celle de (Ox).

$\left(\forall x \in \left]-1;+\infty\right[\right)$:

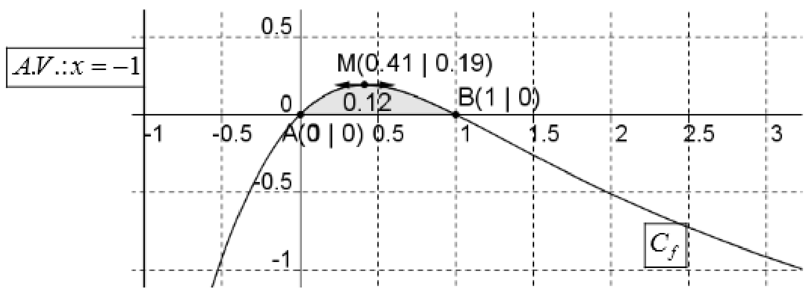
$$f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \underbrace{\boxed{-1-\sqrt{2}}}_{\notin]-1;+\infty[} \vee x = \underbrace{\boxed{\sqrt{2}-1}}_{\in]-1;+\infty[}$$

Tableau des variations

x	-1		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	$\underbrace{\boxed{\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)}}_{\approx 0,19>0}$	$\searrow$	$-\infty$

Représentation graphique



(2)

b) $\left(\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\right):\ f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1\ ;\ \boxed{S=\{0;1\}}$

$A=\int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$

<u>$I.p.p.$</u>

$u(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$	$v(x)=x$
$u'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)(x^2+1)}$	$v'(x)=1$

$$\begin{aligned}&A\\ =\ &\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^3+2x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}dx\\ =\ &\int_0^1\left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx\\ =\ &\left[x+\ln|x+1|-2\arctan(x)\right]_0^1\\ =\ &\boxed{1+\ln(2)-\frac{\pi}{2}u.a.}\\ \approx\ &0,12u.a.\end{aligned}$$

$$\frac{x^3+2x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}=1+\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=1+\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right):$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ b+c=-2\\ a+c=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a=1\wedge b=0\wedge c=-2$$

Question 2 — 10 points

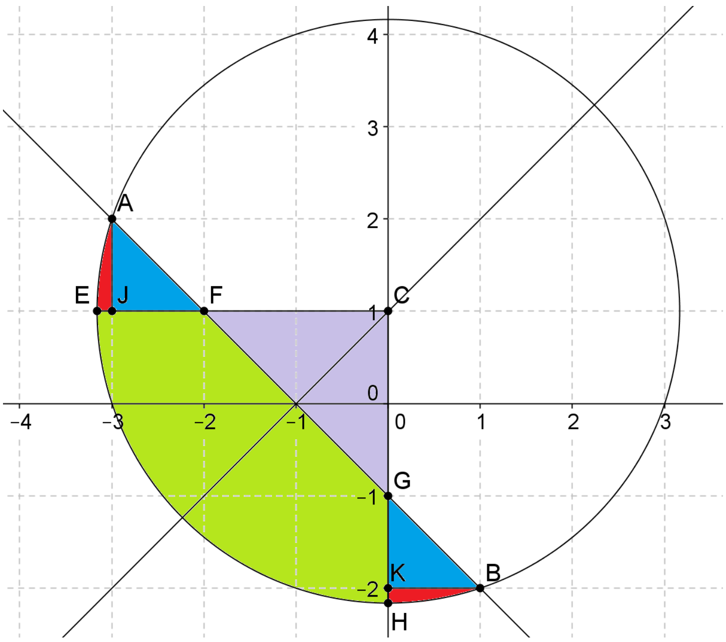
<u>Volume du flotteur</u>

$$\begin{aligned}&V_{flotteur}\\
=\ &\pi\int_0^\pi\left[\sin^2\left(\tfrac12x\right)\cos\left(\tfrac12x\right)\right]^2dx\\
=\ &\pi\int_0^\pi\sin^4\left(\tfrac12x\right)\cos^2\left(\tfrac12x\right)dx\\
=\ &\pi\int_0^\pi\left(\frac{e^{\frac12ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}}{2i}\right)^4\left(\frac{e^{\frac12ix}+e^{\frac{-1}{2}ix}}{2}\right)^2dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left[\left(e^{\frac12ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}\right)\left(e^{\frac12ix}+e^{\frac{-1}{2}ix}\right)\right]^2\left(e^{\frac12ix}-e^{\frac{-1}{2}ix}\right)^2dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-2+e^{-ix}\right)dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left(e^{3ix}-2e^{2ix}+e^{ix}-2e^{ix}+4-2e^{-ix}+e^{-ix}-2e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left(2\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}-4\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}-2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+4\right)dx\\
=\ &\frac{\pi}{64}\int_0^\pi\left(2\cos(3x)-4\cos(2x)-2\cos(x)+4\right)dx\\
=\ &\left[\tfrac{\pi}{96}\sin(3x)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2x)-\tfrac{\pi}{32}\sin(x)+\tfrac{\pi}{16}x\right]_0^\pi\\
=\ &\tfrac{\pi}{96}\sin(3\cdot\pi)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2\cdot\pi)-\tfrac{\pi}{32}\sin(\pi)+\tfrac{\pi}{16}\cdot\pi-\left(\tfrac{\pi}{96}\sin(3\cdot0)-\tfrac{\pi}{32}\sin(2\cdot0)-\tfrac{\pi}{32}\sin(0)+\tfrac{\pi}{16}\cdot0\right)\\
=\ &\boxed{\frac{\pi^2}{16}cm^3}\approx0,62\,cm^3\end{aligned}$$

Solution alternative, obtenue en utilisant les formules de Carnot :

$$f(x)=\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}(1-\cos x)\right)^2\left(\frac{1}{2}(1+\cos x)\right)$$
$$=\frac{1}{8}(1-\cos x)(1-\cos x)(1+\cos x)$$
$$=\frac{1}{8}(1-\cos x)(1-\cos^2 x)$$
$$=\frac{1}{8}(1-\cos x-\cos^2 x+\cos^3 x)$$
$$=\frac{1}{8}\left(1-\cos x-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)\right) \qquad \text{d'après le formulaire trig. (cadeau :-))}$$
$$=\frac{1}{32}(4-4\cos x-2-2\cos 2x+\cos 3x+3\cos x)$$
$$=\frac{1}{32}(2-\cos x-2\cos 2x+\cos 3x)$$

Question 3



Equations du cercle $\mathcal{C}$: $x^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow y=1\pm\sqrt{10-x^2}$

Abscisses des points d'intersections du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $d: y=-x-1$:

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(y-1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-2)^2=10 \end{cases}$$

On résout la 2^e équation :

$$\begin{aligned}
&x^2+x^2+4x+4=10\\
&\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0\\
&\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\\
&\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-3
\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de la surface par rapport à la 1re bissectrice $y=x$ du repère, et en utilisant le découpage de la figure ci-dessus, on a :

$$\mathcal{A}=2\cdot\int_{-\sqrt{10}}^{-3}\left(1+\sqrt{10-x^2}-1\right)\mathrm{d}x+2\cdot\left[AJF\right]+\text{aire du quart de cercle }-\left[FCG\right]$$

$$=2\cdot\int_{-\sqrt{10}}^{-3}\left(1+\sqrt{10-x^2}-1\right)\mathrm{d}x+1+\frac{\pi\cdot 10}{4}-2$$

$$=2\cdot\int_{3}^{\sqrt{10}}\sqrt{10-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{5\pi}{2}-1$$

On utilise la parité de la fonction !

$$=20\int_{\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t+\frac{5\pi}{2}-1$$

$$=10\int_{\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t+\frac{5\pi}{2}-1$$

Substitution : $x=\sqrt{10}\sin t$, $\mathrm{d}x=\sqrt{10}\cos t\,\mathrm{d}t$

$$=10\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{5\pi}{2}-1$$

$$=10\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}-\sin\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}\right]+\frac{5\pi}{2}-1$$

$$=5\pi-10\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}-10\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{5\pi}{2}-1$$

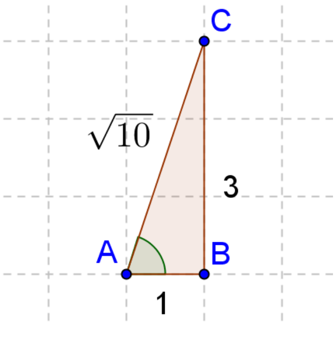
$$=5\pi-10\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}-10\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{5\pi}{2}-1$$

$$=\frac{15\pi}{2}-10\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}-4\approx 7{,}07149\text{ u.a.}$$

Calcul à part :

Posons : $\alpha=\operatorname{Arcsin}\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$

Alors : $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$



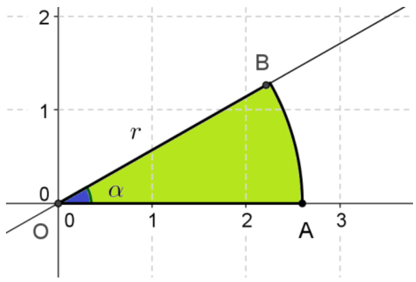
En général : $\cos(\operatorname{Arcsin}x)=\sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\operatorname{Arccos}x)=\sqrt{1-x^2}$, pour $-1\leq x\leq 1$

Question 4

(1) La droite faisant un angle α avec l'axe des abscisses a comme équation : $y = \tan\alpha \cdot x$. Elle coupe le cercle de centre O et de rayon r en $B\left(r\cos\alpha, r\sin\alpha\right)$.

(Pensez à la forme trigonométrique d'un nombre complexe ... !)

Donc :



$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\left(\alpha\right) &= \pi\int_0^{r\cos\alpha}\left(x\tan\alpha\right)^2 \mathrm{d}x + \pi\int_{r\cos\alpha}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3}\tan^2\alpha\right]_0^{r\cos\alpha} + \pi\int_{r\cos\alpha}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\frac{r^3\cos^3\alpha}{3}\tan^2\alpha + \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\alpha}^{r} \\
&= \frac{\pi r^3\cos^3\alpha}{3} + \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2\cos\alpha + \frac{r^3\cos^3\alpha}{3}\right) \\
&= \frac{\pi r^3\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{3} + \frac{2\pi r^3}{3} - \pi r^3\cos\alpha + \frac{\pi r^3\cos^3\alpha}{3} \\
&= \frac{\pi r^3\cos\alpha}{3} - \cancel{\frac{\pi r^3\cos^3\alpha}{3}} + \frac{2\pi r^3}{3} - \pi r^3\cos\alpha + \cancel{\frac{\pi r^3\cos^3\alpha}{3}} \\
&= \frac{2\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3}\cos\alpha \\
&= \frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\cos\alpha\right) \quad \text{u.v.}
\end{aligned}$$

(2) a) Figure …

On pose $\beta = \pi - \alpha$ (donc $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$) et on calcule le volume de la boule de rayon r moins le volume calculé en (1) en remplaçant α par β, c.-à-d. moins $\mathcal{V}\left(\beta\right)$. Le volume obtenu est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}' &= \frac{4\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\cos\beta\right) \\
&= \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{2\pi r^3}{3}\cos\left(\pi-\alpha\right) \\
&= \frac{2\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3}\cos\alpha \\
&= \frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

Par magie ☺, la formule du (1) reste donc valable lorsque $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$!

b)

$$\begin{aligned} V'' &= \text{volume de la demi-boule de rayon } r - \mathcal{V}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \\ &= \frac{2\pi r^3}{3}\sin\alpha \end{aligned}$$

Question 5

(1) Voir questions d'examen.