

Question 1

(1) a)

$$\begin{aligned}
 & 3^{1-x} - 3^{2+x} \leq 6 \quad | \cdot 3^x \quad D = \mathbb{R} \\
 & \Leftrightarrow 3 - 3^{2+2x} \leq 6 \cdot 3^x \\
 & \Leftrightarrow 3 - 9 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x \leq 0 \quad | : (-3) \\
 & \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 1 \geq 0 \quad (I) \\
 & \text{Posons } 3^x = t, \text{ donc } t > 0 \\
 & \text{L'inéquation s'écrit : } 3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \quad \Delta = 4 + 12 = 16 \quad ; \quad t = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -1 \end{cases} \\
 & \begin{array}{c|cc} t & -1 & \frac{1}{3} \\ \hline 3t^2 + 2t - 1 & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \\
 & (I) \Leftrightarrow t \leq -1 \quad \text{ou} \quad t \geq \frac{1}{3} \\
 & \Leftrightarrow \underbrace{3^x \leq -1}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad 3^x \geq \frac{1}{3} \\
 & \Leftrightarrow 3^x \geq 3^{-1} \\
 & \Leftrightarrow x \geq -1 \\
 & \boxed{S_{\mathbb{R}} = [-1; +\infty[}
 \end{aligned}$$

$$a) \quad \log_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x+1}{x-1} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 & C.E. & (1) \\ -2 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} \leq 2 & (2) \end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 (2) & \Leftrightarrow -2 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad / \exp_{\frac{1}{3}} \searrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \geq \frac{x+1}{x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 9
 \end{aligned}$$

Donc, pas besoin de résoudre la C.E. (1) ! (Evidemment on ne perd pas beaucoup de temps en résolvant la C.E. ...)

$$(2a) \quad \frac{x+1}{x-1} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{9x-9}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-8x+10}{x-1} \leq 0$$

Tableau du signe $\rightarrow S_1 =]-\infty, 1[\cup [\frac{5}{4}, +\infty[$

$$(2b) \quad \frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{9x+9}{9(x-1)} - \frac{x-1}{9(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x+10}{9(x-1)} \geq 0$$

Tableau du signe $\rightarrow S_2 =]-\infty, -\frac{5}{4}[\cup]1, +\infty[$

Donc : $S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -\frac{5}{4}] \cup [\frac{5}{4}, +\infty[$

(2) Calculer *sans calculatrice* :

$$a) \quad 49^{\frac{\log_1 3}{7}} = (7^2)^{\frac{\log_1 3}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2\log_1 3} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_1 3}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$b) \quad \log_4^2 \left(\frac{32}{\sqrt[3]{16^7}} \right) = \log_4^2 \left(\frac{2^5}{\sqrt[3]{2^{28}}} \right) = \log_4^2 \left(\frac{2^5}{2^{\frac{28}{3}}} \right) = \log_4^2 \left(2^{-\frac{13}{3}} \right)$$

$$= \left[\log_4 \left(4^{-\frac{13}{6}} \right) \right]^2 = \left(-\frac{13}{6} \right)^2 = \frac{169}{36}$$

$$c) \quad \frac{\sqrt{e}^{\ln 8 - 2\ln 3}}{\ln(e^5 \sqrt{e})} = \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 9)}}{\ln(e^{\frac{11}{2}})} = \frac{\left(e^{\frac{\ln 8}{9}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{9}}}{\frac{11}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{11} = \frac{4\sqrt{2}}{33}$$

Question 2

(1)

$$f(x) = x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}}$$

(a) C.E. : $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}} \right)$$

On distingue deux cas :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}} \right) = +\infty \quad \text{donc A.V. d'équation } y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}{x} \right) = 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \right) = 2 + e = b$$

De même :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 2 + e$$

G_f admet donc une A.O. $\begin{pmatrix} D \\ G \end{pmatrix}$ d'équation $y = x + 2 + e$

(2) Position de G_f par rapport à son asymptote horizontale ou oblique éventuelle.

(b) Position de G_f par rapport à l'A.O. :

On étudie le signe de $\varepsilon(x) = f(x) - (x + 2 + e) = e^{\frac{x}{x+1}} - e$

Posons $\varepsilon(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x+1}} > e \quad | \ln$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

x		-1	
$\varepsilon(x)$	+		-
	$G_f / A.O.$		$A.O. / G_f$

(3) Sens de variation de f et concavité de \mathcal{G}_f .

(c) $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = 1 + e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$$

pas d'extrémum ; f est croissante sur $\text{dom } f$

$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^4} \cdot (-2x-2+1) \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$= (-2x-1) \cdot \underbrace{\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4}}_{>0}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+		+	0 -
G_f	\cup		\cup	P.I. \cap

Comme $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{e} \approx 1,87$, point d'inflexion $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} + \frac{1}{e}\right)$

Tableau de variation complet :

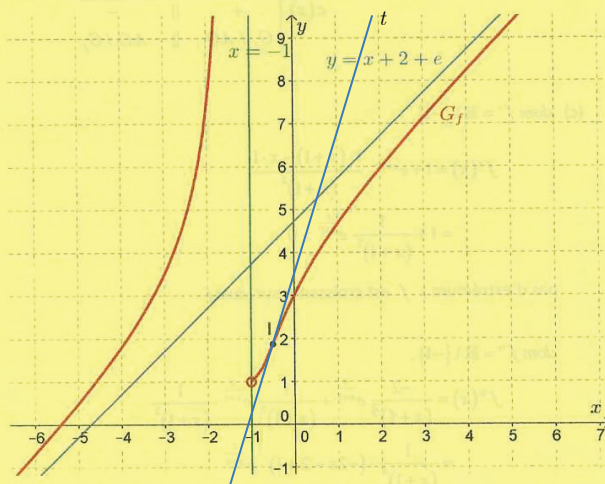
x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$				
$f'(x)$	+		+	+				
$f''(x)$	+		+	0	-			
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$		\nearrow	$\frac{3}{2} + \frac{1}{e}$	\nearrow	$+\infty$

(4) Représentation graphique :

(d) Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	$\approx 1,8$	$\approx 3,5$	$\approx 7,4$	3	$\approx 4,6$	$\approx 5,9$

Représentation graphique :



(5) a) La tangente à \mathcal{G}_f au point d'abscisse a a un coefficient directeur ≤ 1

$$\Leftrightarrow f'(a) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(a+1)^2} e^{\frac{a}{a+1}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{(a+1)^2}}_{>0} \underbrace{e^{\frac{a}{a+1}}}_{>0} \leq 0, \text{ impossible !}$$

$$\text{b) } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4e^{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{4}{e}$$

$$t_{-\frac{1}{2}} \equiv y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{4}{e}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{4}{e}\right)x + \frac{1}{2} + \frac{2}{e} + \frac{3}{2} + \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(1 + \frac{4}{e}\right)x + 2 + \frac{3}{e}$$

Question 3

$$(m+1)e^x - (m-1)e^{-x} = 2m \quad | \cdot e^x \quad (\text{E})$$

$$\Leftrightarrow (m+1)e^{2x} - 2me^x - (m-1) = 0 \quad \text{posons : } y = e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)y^2 - 2my - (m-1) = 0$$

- $\boxed{m = -1}$

$$(\text{E}) \Leftrightarrow 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ impossible}$$

(E) n'admet aucune solution réelle.

- $\boxed{m \neq -1}$

$$\Delta = (-2m)^2 + 4(m+1)(m-1) = 4m^2 + 4m^2 - 4 = 8m^2 - 4$$

$$\text{Produit des racines éventuelles : } P = \frac{c}{a} = -\frac{m-1}{m+1}$$

$$\text{Somme des racines éventuelles : } S = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m+1}$$

m	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$			
Δ	+		+	0	-	-	0	+	+	
P	-		+	+	+	+	+	0	-	
S	+		-	-	0	+	+	+	+	
nombre de solutions en x de (E)	1	0	0	0	0	0	1	2	1	1

Si $m \in [-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, alors (E) n'admet aucune solution réelle.

Si $m \in]-\infty ; -1[\cup \{ \frac{\sqrt{2}}{2} \} \cup [1 ; +\infty[$, alors (E) admet exactement une solution réelle.

Si $m \in]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1[$, alors (E) admet exactement deux solutions réelles.