

## Question 1

16 (=10+6) points

(1) a) C.E. :  $e^x + 1 > 0$ , toujours vrai, donc  $\text{dom } f = \text{dom}_c f = \mathbb{R}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ , donc  $\mathcal{G}_f$  admet l'A.H.G.  $\Delta : y = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , donc  $\mathcal{G}_f$  n'admet pas d'A.H.D.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\underbrace{\cancel{e^x}(1 + e^{-x})}_{\rightarrow 1}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(e^x (1 + e^{-x})) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0 \end{aligned}$$

*ou bien :*

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(e^x + 1) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(e^x + 1) - \ln e^x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{e^x + 1}{e^x} \right) \quad \text{cf. ci-dessus} \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{G}_f$  admet l'A.O.G.  $\Delta' : y = x$ .

c)  $f(x) - 0 = \ln(1 + e^x) > 0$ , car  $1 + e^x > 1$ .

Donc  $\mathcal{G}_f$  est toujours située au-dessus de  $\Delta$ .

$f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$ , car  $1 + e^{-x} > 1$ .

Donc  $\mathcal{G}_f$  est toujours située au-dessus de  $\Delta'$ .

d)  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$ ,

donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

[illegible]

A graph showing the function  $y = e^x$  (black curve) and its tangent line at  $x = 1$  (red line). The x-axis ranges from -5 to 5, and the y-axis ranges from 0 to 5. The tangent line passes through the point  $(1, e)$  on the curve.

- c)  $(\forall y \in ]0, +\infty[)(\forall x \in \mathbb{R})$

Donc :  $f^{-1}: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(e^x - 1)$

Le graphe de  $f^{-1}$  admet deux asymptotes :  $AV. : x = 0$  et  $AO. : y = x$ , car les graphes de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la 1<sup>re</sup> bissectrice :  $y = x$ , donc les asymptotes aux deux courbes sont également symétriques par rapport à cette droite.

## Question 2

22 (=6+10+6) points

$$(1) \quad \log_3(2x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leq \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{2x+2}) \quad (I)$$

$$\text{C.E. : } \begin{cases} 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \\ 4-x > 0 \Leftrightarrow x < 4 \\ 2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \end{cases} \quad \text{donc } D = \left] \frac{1}{2}, 4 \right[$$

$$(\forall x \in D) \quad (I) \Leftrightarrow \log_3(2x-1) - \frac{\log_3(4-x)}{\log_3\left(\frac{1}{3}\right)} \leq \frac{\frac{1}{2}\log_3(2x+2)}{\log_3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) + \log_3(4-x) \leq \log_3(2x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)(4-x) \leq \log_3(2x+2)$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(4-x) \leq 2x+2$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 4 \leq 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 1, \quad x_1 = \frac{7+1}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \cup [2, 4[$$

$$(2) \quad \ln(2e^x - 5) > \ln(13e^{-x} - 30e^{-2x})$$

$$\ln(2e^x - 5) > \ln(13e^{-x} - 30e^{-2x}) \quad (I)$$

$$\text{C.E. : } \begin{cases} 2e^x - 5 > 0 & (1) \\ 13e^{-x} - 30e^{-2x} > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow e^x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > \ln \frac{5}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow 13e^x - 30 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{30}{13} \Leftrightarrow x > \ln \frac{30}{13}$$

$$\text{Supposons : } x \in D = \left] \ln \frac{5}{2}; +\infty \right[$$

$$(I) \Leftrightarrow 2e^x - 5 > 13e^{-x} - 30e^{-2x} \quad [\text{car } \ln \text{ est une bijection strictement croissante}]$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 5 - \frac{13}{e^x} + \frac{30}{e^{2x}} > 0 \quad | \cdot e^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{3x} - 5e^{2x} - 13e^x + 30 > 0$$

$$\text{Posons : } u = e^x$$

$$(I) \Leftrightarrow 2u^3 - 5u^2 - 13u + 30 > 0$$

$$\text{Posons : } p(u) = 2u^3 - 5u^2 - 13u + 30$$

On a :  $p(2) = 0$  Horner : 
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -5 & -13 & 30 \\ & & 4 & -2 & -30 \\ \hline & 2 & -1 & -15 & 0 \end{array}$$

$p(u) = (u-2)(2u^2 - u - 15)$   
 $2u^2 - u - 15 = 0$  [ $\Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 15 = 121$ ]  
 $\Leftrightarrow u = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2}$  ou  $u = \frac{1+11}{4} = 3$   
 $p(u) = 2u^3 - 5u^2 - 13u + 30 = (u-2)(2u+5)(u-3)$

$u$	$-\frac{5}{2}$	$2$	$3$
$u-2$	$-$	$-$	$+$
$2u^2 - u - 15$	$+$	$0$	$+$
$2u^3 - 5u^2 - 13u + 30$	$-$	$0$	$+$

$(I) \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < u < 2$  ou  $u > 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < e^x < 2$  ou  $e^x > 3 \Leftrightarrow x < \ln 2$  ou  $x > \ln 3$   
 $S = ]-\infty; \ln 2[ \cup ]\ln 3; +\infty[ \cap D = ]\ln 3; +\infty[$

(3)  $\log_{x+2}(2x) = \log_{2x}(x+2)$

$\log_{x+2}(2x) = \log_{2x}(x+2)$

C.E. : 1)  $x+2 > 0$  et  $x+2 \neq 1 \Leftrightarrow x > -2$  et  $x \neq -1$

2)  $2x > 0$  et  $2x \neq 1 \Leftrightarrow x > 0$  et  $x \neq \frac{1}{2}$

$D = ]0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$

$\forall x \in D : \log_{x+2}(2x) = \log_{2x}(x+2) \Leftrightarrow \frac{\ln 2x}{\ln(x+2)} = \frac{\ln(x+2)}{\ln 2x}$

$\Leftrightarrow \ln^2 2x = \ln^2(x+2)$

$\Leftrightarrow \ln 2x = \ln(x+2)$  ou  $\ln 2x = -\ln(x+2)$

$\Leftrightarrow 2x = x+2$  ou  $2x = \frac{1}{x+2}$

$\Leftrightarrow x = 2$  ou  $2x^2 + 4x - 1 = 0$  [ $\Delta = 24$ ]

$\Leftrightarrow x = 2$  ou  $x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$  ou  $x = \frac{-2-\sqrt{6}}{2} (\notin D)$

$S = \{ \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; 2 \}$

### Question 3

22 (=3+4+4+7+4) points

#### a) Conditions d'existence

$$(\forall m \in ]0; +\infty[) : \frac{1-mx}{x+1} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{m}$$

$$\text{dom } f_m = ]-1; \frac{1}{m}[$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left( \underbrace{\frac{\overbrace{1-mx}^{\rightarrow 1+m}}{\underbrace{x+1}_{\rightarrow 0^+}}}_{\rightarrow +\infty} \right) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}^-} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}^-} \ln \left( \underbrace{\frac{\overbrace{1-mx}^{\rightarrow 0^+}}{\underbrace{x+1}_{\rightarrow \frac{1}{m}+1}}}_{\rightarrow 0^+} \right) = -\infty$$

#### Conclusion

$C_{f_m}$  admet une A.V. :  $x = -1$  et A.V. :  $x = \frac{1}{m}$ .

$$\text{c) } (\forall x \in ]-1; \frac{1}{m}[) : f'_m(x) = \frac{\left(\frac{-mx+1}{x+1}\right)'}{\frac{-mx+1}{x+1}} = \frac{-m-1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{-mx+1} = \frac{m+1}{(x+1)(mx-1)}$$

#### Tableau des variations

$x$	$-1$	$\frac{1}{m}$
$f'_m(x)$	$\parallel$	$\parallel$
$f_m(x)$	$\parallel +\infty$	$\searrow -\infty \parallel$

$$\text{d) } (\forall x \in ]-1; \frac{1}{m}[) : f''_m(x) = \frac{(m+1)[-(mx-1)-m(x+1)]}{[(x+1)(mx-1)]^2} = \frac{-(m+1)(2mx+m-1)}{(x+1)^2(mx-1)^2}$$

$$f''_m(x) = 0 \Leftrightarrow 2mx + m - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-m}{2m}$$

$$\frac{1-m}{2m} - (-1) = \frac{m+1}{2m} > 0 ; \frac{1}{m} - \frac{1-m}{2m} = \frac{m+1}{2m} > 0 \text{ donc : } \frac{m+1}{2m} \in ]-1; \frac{1}{m}[$$

#### Tableau de concavité

$x$	$-1$	$\frac{1-m}{2m}$	$\frac{1}{m}$
$f''_m(x)$	$\parallel$	$+$	$0$
$C_{f_m}$	$\parallel$	$\cup$	$P.I.$

Point d'inflexion :  $I_m \left( \frac{1-m}{2m} \mid \ln(m) \right)$

