

Question 1

15 (=10+5) points

(1) Résoudre l'inéquation suivante dans \mathbb{R} :

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x - x^2) - \log_2\left(\frac{1}{x}\right) + \log_4|x-1| \leq 0 \quad (I)$$

C.E: ① $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(3-x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 3[$

② $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

③ $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$\text{dom} =]0, 3[\setminus \{1\}$

$$(I) \Leftrightarrow \frac{\log_2(3x-x^2)}{\log_2(1/4)} + \log_2 x + \frac{\log_2|x-1|}{\log_2 4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_2(3x-x^2) + \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2|x-1| \leq 0 \quad / \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2 x + \log_2|x-1| \leq \log_2(3x-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2|x-1|) \leq \log_2(3x-x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2|x-1| \leq 3x-x^2 \quad | : x (>0)$$

$$\Leftrightarrow x|x-1| \leq 3-x$$

1^{er} cas $\boxed{x > 1}$: $x(x-1) \leq 3-x$
 $\Leftrightarrow x^2 - x \leq 3-x$
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$
 $S_1 =]1, \sqrt{3}]$

2^e cas $\boxed{0 < x < 1}$: $x(1-x) \leq 3-x$
 $\Leftrightarrow x - x^2 \leq 3-x$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 0$

Toujours vrai car $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

$$S_2 =]0, 1[$$

$$S = \boxed{S_1 \cup S_2} =]0, \sqrt{3}] \setminus \{1\}$$

Equation du manuel, pas posée dans ce devoir :

$$\frac{x^{\log(7x^2)}}{7 \cdot x^{\log(4x)}} = \frac{7^{\log 4}}{7} \quad (E)$$

C.E : $x > 0$ $\text{dom} = \mathbb{R}_+^*$

$$(E) \Leftrightarrow x^{\log 7 + 2\log x - \log 4 - \log x} = 7^{\log 4}$$

$$\Leftrightarrow x^{\log 7 + \log x - \log 4} = 10^{\log 4 \cdot \log 7}$$

$$\Leftrightarrow 10^{(\log 7 + \log x - \log 4) \cdot \log x} = 10^{\log 4 \cdot \log 7}$$

$$\Leftrightarrow \log 7 \cdot \log x + \log^2 x - \log 4 \cdot \log x = \log 4 \cdot \log 7$$

$$\Leftrightarrow \log x (\log 7 + \log x) - \log 4 (\log 7 + \log x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log x + \log 7)(\log x - \log 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = -\log 7 \text{ ou } \log x = \log 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ ou } x = 4$$

$$S = \left\{ \frac{1}{7}; 4 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } 7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} &= 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}) \\
\Leftrightarrow 7 \cdot 7^{x+\frac{1}{3}} - 5^{3x} &= 2 \cdot 7^{x+\frac{1}{3}} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^{3x} \\
\Leftrightarrow (7-2) \cdot 7^{x+\frac{1}{3}} &= \left(\frac{2}{5} + 1\right) \cdot 5^{3x} \\
\Leftrightarrow 5 \cdot 7^{x+\frac{1}{3}} &= \frac{7}{5} \cdot 5^{3x} \\
\Leftrightarrow 7^{x-\frac{2}{3}} &= 5^{3x-2} \quad (*) \\
\Leftrightarrow e^{(x-\frac{2}{3})\ln 7} &= e^{(3x-2)\ln 5} \\
\Leftrightarrow x \cdot (\ln 7 - 3\ln 5) &= \frac{2}{3}\ln 7 - 2\ln 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow x &= \frac{\frac{2}{3}\ln 7 - 2\ln 5}{\ln 7 - 3\ln 5} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{\frac{2}{3}(\ln 7 - 3\ln 5)}{\ln 7 - 3\ln 5} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \\
S &= \left\{\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

(*) ou bien :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{7}{5^3}\right)^x &= \frac{7^{2/3}}{5^2} \\
\Rightarrow \left(\frac{7}{5^3}\right)^x &= \left(\frac{7}{5^3}\right)^{2/3} \\
\Rightarrow x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Question 2

27 (=1+7+11+2+6) points

$$f(x) = x \cdot \ln \frac{x+1}{x}$$

1) $\text{dom } f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[= \text{dom } f^*$

2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \text{A.H. : } y = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \quad \text{« trou » au pt. } O(0; 0)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(\underbrace{x}_{\rightarrow -1} \cdot \underbrace{\ln \frac{x+1}{x}}_{\rightarrow -\infty} \right) = +\infty \quad \text{A.V. : } x = -1$

3) a) $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[: f'(x) = 1 \cdot \ln \frac{x+1}{x} + x \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\ln \frac{x+1}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\rightarrow 0} \right) = 0$

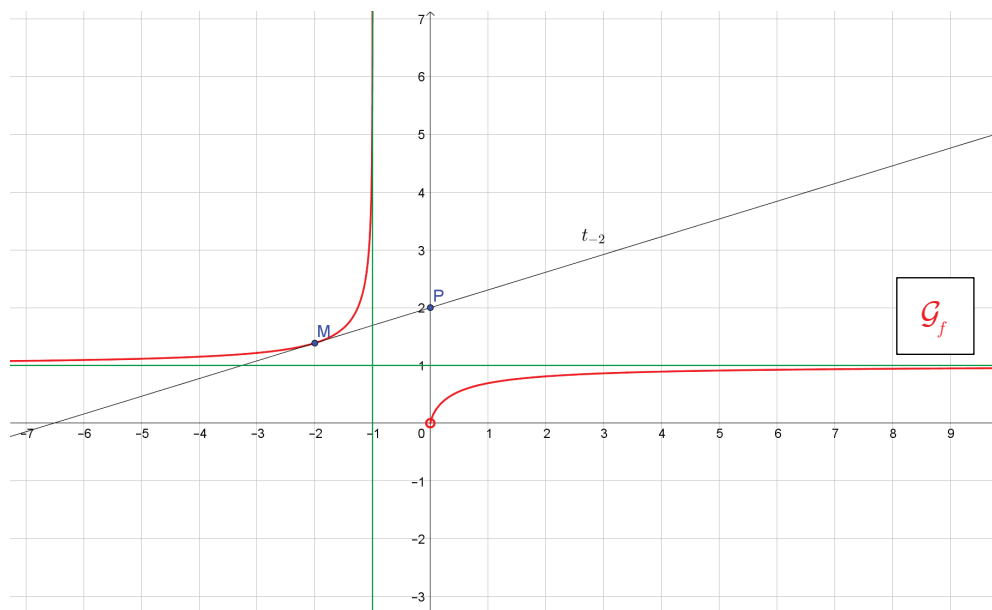
$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[: f''(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-x(x+1) + x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x}{x^2(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

	$x -\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	+			-
f'	0 \nearrow			\searrow 0

c) On peut en déduire que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[: f'(x) > 0$

	$x -\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f''(x)$	+			-
f	1 $\nearrow +\infty$			0 \nearrow 1
G_f	A.H.G. \cup	A.V.		"trou" \cup A.H.D.

4)



5) Soit $M(m; f(m))$ ($m \in \text{dom } f$) le point cherché.

$$t_m \equiv y - f(m) = f'(m) \cdot (x - m)$$

$$P(0; 2) \in t_m \Leftrightarrow 2 - m \cdot \ln \frac{m+1}{m} = \left(\ln \frac{m+1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \cdot (0 - m)$$

$$\Leftrightarrow 2 - m \cdot \ln \frac{m+1}{m} = -m \ln \frac{m+1}{m} + \frac{m}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{m}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow m = 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \quad M(-2; 2 \ln 2)$$

$$t_{-2} : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\ln \frac{1}{2} + 1 \right) (x + 2) - 2 \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - \ln 2)x + 2 - 2 \ln 2 + 2 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow y = (1 - \ln 2)x + 2$$

Remarquons que :

$$(\forall x > 0) \quad g(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{\ln x}{2x}}$$

→ pensez à simplifier!
($\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$)

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{2x}} = e^{-\infty} = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en 0.
donc $g' = \mathbb{R}_+$

$$(2) \quad g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln x}{2x}}}{x}$$

$$(x = e^{\ln x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{2x} - \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{2x} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)} = 0$$

(H) serait
une mauvaise
idée ici !!

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$,
ce qui signifie que g admet en $(0,0)$
une demi-tangente horizontale et
donc $g' = \mathbb{R}_+$.

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{2x}} = e^0 = 1$$

$$\rightarrow \text{A.H.D : } y = 1$$

Calcul à part :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0$$

|| $\frac{+\infty}{+\infty}$ ||

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (\forall x > 0) \quad g'(x) &= \left(e^{\frac{\ln x}{2x}} \right)' \\
 &= e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot (2x) - \ln x \cdot 2}{4x^2} \right) \\
 &= e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \frac{2 - 2 \ln x}{4x^2} \\
 &= e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{2x^2}
 \end{aligned}$$

Donc : $g'(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{2x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{2x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e$$

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	0	0	-
$g(x)$	\textcircled{m}	$e^{\frac{1}{2e}}$ \textcircled{M}	1

(5) Notons : $(E_m) : m^{2x} = x$

Le domaine de l'équation est $D = \mathbb{R}$, car par hypothèse, m est un réel > 0 .

1^{er} cas : $x \leq 0$: un tel x ne peut être solution de (E_m) car le membre de gauche est > 0 . **2^e cas** : $x > 0$: Alors

$$(E_m) \Leftrightarrow m = x^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{x^{\frac{1}{x}}} = g(x)$$

Donc le nombre de solutions de (E_m) est donnée dans le tableau suivant, obtenu en consultant le TV de g ci-dessus :

m	0	1	$e^{\frac{1}{2e}}$	$+\infty$
nombre de sol. de (E_m)	X	1	2	1