Nom : ....   Prénom : ....

1CB2 Devoir de mathématiques II,3 8.05.2018

Durée : 110' ***Calculatrice autorisée***

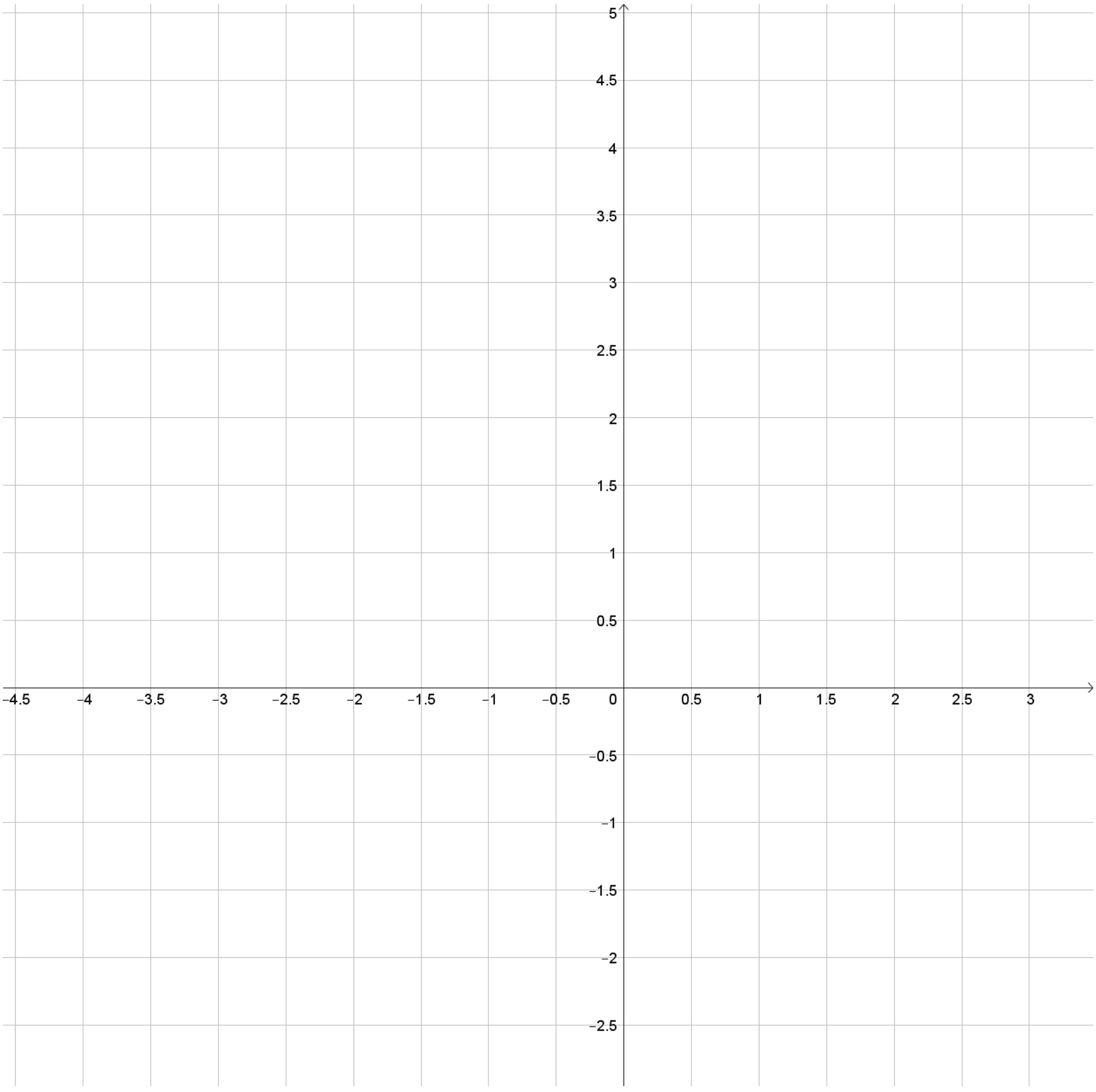
Question 1 38 (=(4)+(1+8+14+3+8)) points

Soit la fonction

$$f_m : x \mapsto \frac{e^{2x} - m}{e^x - m},$$

m étant un ***paramètre réel*** ≥ 0 et soit $\mathcal{G}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On discutera en fonction de m si nécessaire.

A. ***Simplifier*** les fonctions f_0 et f_1 et représenter soigneusement avec des couleurs différentes ces fonctions dans le repère orthonormé ci-dessous.



B. ***Dans la suite du problème on supposera que*** $m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

(1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f_m.

(2) Calculer les limites de f_m aux bornes du domaine et en déduire les asymptotes et branches paraboliques éventuelles de $\mathcal{G}_m$.

(3) Calculer f_m' et en déduire les variations de f_m. ***Indication*** : il y a ***2 cas***. On ne demande pas de déterminer les ordonnées des points extrema, le cas échéant.

(4) Représenter avec précision $f_{\frac{1}{2}}$ sur le graphique de la partie A.

(5) a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+\right) \qquad f_0\left(x\right) \leq f_{\frac{1}{2}}\left(x\right)$.

b) Calculer l'aire de la partie fermée du plan comprise entre $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. ***Indication*** : on pourra se ramener à une intégrale d'une fraction rationnelle en substituant $t = e^x$, auquel cas il faudra par exemple déterminer les constantes a et b telles que :

$$\frac{t-1}{t(2t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{2t-1}.$$

N.B. : Il y a aussi d'autres méthodes pour calculer l'intégrale.

Question 2 — 15 points

Soit $g : x \mapsto x\sqrt{x}$ et $h : x \mapsto mx$, où m est un paramètre réel > 0. On note S la surface fermée du plan comprise entre les graphes de ces deux fonctions. Déterminer les points d'intersection des deux graphes, faire une esquisse, puis déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles les solides de révolution engendrés par la rotation de la surface S

a) autour de (Ox) et

b) autour de (Oy)

admettent un volume de 12π u.v. respectivement.

Question 3 — 7 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x - 2\log_4(2^x - 5) + 2\log_{\frac{1}{2}} 7 < \frac{-1}{\log_7 2}$$

G. Lorang