Nom : .... Prénom : ....

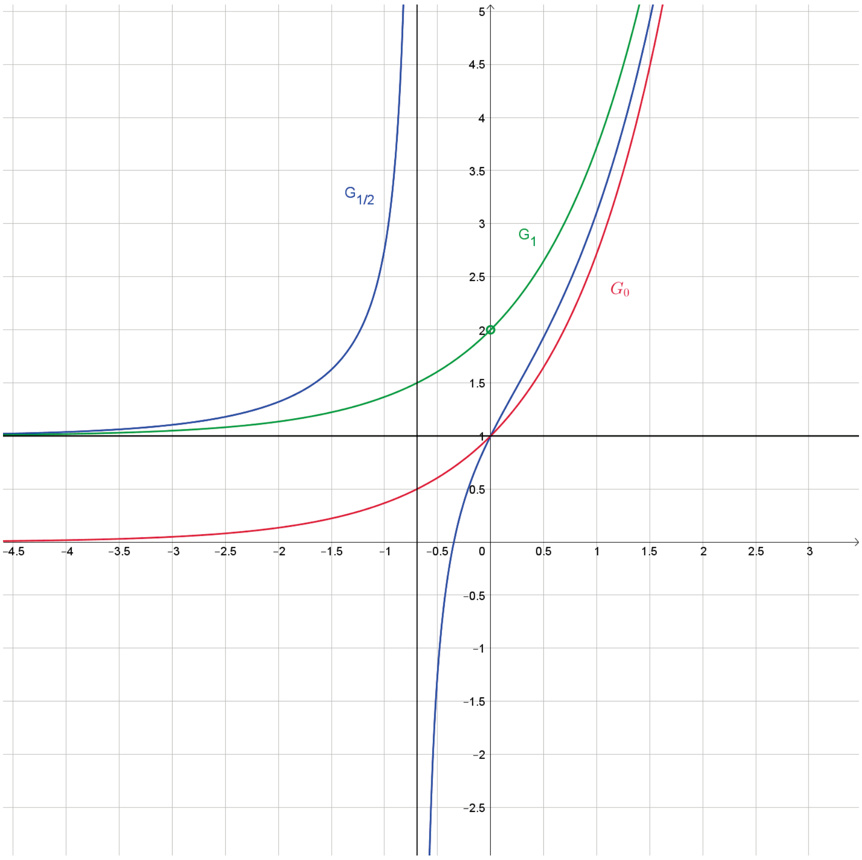
1CB2 Corrigé du devoir II,3 8.05.2018

Question 1

A. $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \qquad f_0(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$, donc f_0 est la fonction exponentielle, $\operatorname{dom} f_0 = \mathbb{R}$

$\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \qquad f_1(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^x-1} = e^x+1$

Attention : $\operatorname{dom} f_1 = \mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{G}_1$ admet un « trou » en $(0,2)$.



B. Maintenant : $m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

(1) $C.E.: e^x - m \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq m \Leftrightarrow x \neq \ln m$.

Donc $\operatorname{dom} f_m = \operatorname{dom}_c f_m = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln m\right\}$.

(2) a) **Limite en** $\ln m$

$$\lim_{x \to (\ln m)^{\pm}} f_m\left(x\right) = \lim_{x \to (\ln m)^{\pm}} \frac{e^{2x}-m}{e^x-m}$$

$$= "\frac{e^{2\ln m}-m}{0^{\pm}}" = "\frac{m^2-m}{0^{\pm}}" = "\frac{\overbrace{m}^{>0}\left(m-1\right)}{0^{\pm}}" = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } m>1 \\ \mp\infty & \text{si } 0<m<1 \end{cases}$$

Donc on a toujours une $A.V.: x = \ln m$ (si $m>0$ et $m \neq 1$)

b) **Comportement en** $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m\left(x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0} - m}{\underbrace{e^{x}}_{\to 0} - m} = 1 \ \ (\text{car } \ m \neq 0\,)$$

Donc : $A.H.G : y = 1$

b) **Comportement en** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m\left(x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\overbrace{(1-\overbrace{me^{-2x}}^{\to 0})}^{\to 1}}{e^{x}\underbrace{(1-\underbrace{me^{-x}}_{\to 0})}_{\to 1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$

De même : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f_m\left(x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\overbrace{(1-\overbrace{me^{-2x}}^{\to 0})}^{\to 1}}{xe^{x}\underbrace{(1-\underbrace{me^{-x}}_{\to 0})}_{\to 1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{1} = +\infty$

Donc : $B.P.D.$ de $D.A.$ (Oy).

(3) $\quad \text{dom}\, f_m\,' = \mathbb{R} \setminus \left\{\ln m\right\}$

$$\begin{aligned} f_m\,'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^{x}-m)-(e^{2x}-m)e^{x}}{(e^{x}-m)^2} \\ &= \frac{2e^{3x}-2me^{2x}-e^{3x}+me^{x}}{(e^{x}-m)^2} \\ &= \frac{\overbrace{e^{x}}^{>0}(e^{2x}-2me^{x}+m)}{(e^{x}-m)^2} \end{aligned}$$

et $f_m\,'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2me^{x} + m = 0$.

Posons : $y = e^{x} > 0$, alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} & y^2 - 2my + m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^2 - 2my + m^2 = m^2 - m \\ \Leftrightarrow\ & \left(y-m\right)^2 = m^2 - m \qquad (E) \end{aligned}$$

1$^{\text{er}}$ cas : $m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m(m-1) > 0 \Leftrightarrow \boxed{m > 1}$

(E) admet alors deux solutions distinctes en y.

$$y_1 = m - \sqrt{m^2-m} \ \text{ et } \ y_2 = m + \sqrt{m^2-m}$$

Il faut étudier le signe de ces 2 racines. Or il est clair que $y_2 > 0$. Le produit des racines étant égal à $m > 0$, on en déduit immédiatement que $y_1 > 0$.

Donc : $f_m\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(m - \sqrt{m^2-m}\right) = x_1$ ou $x = \ln\left(m + \sqrt{m^2-m}\right) = x_2$

Par ailleurs : comme $m+\sqrt{m^2-m}>m$ et $m-\sqrt{m^2-m}<m$, on a :

$\ln\left(m+\sqrt{m^2-m}\right)>\ln m$ et $\ln\left(m-\sqrt{m^2-m}\right)<\ln m$, c.-à-d. $x_1<\ln m<x_2$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		x_1		$\ln m$		x_2		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

2$^{\text{er}}$ cas : $m^2-m<0 \Leftrightarrow m(m-1)<0 \Leftrightarrow \boxed{0<m<1}$

Dans ce cas (E) n'admet pas de solution et donc : $(\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\ln m\})\ \ f_m{}'(x)>0$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f_m(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(4) Voir page 1.

(5) a)

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+\right)\qquad f_0\left(x\right)\le f_{\frac{1}{2}}\left(x\right)\Leftrightarrow e^x\le\frac{e^{2x}-\frac{1}{2}}{\underbrace{e^x-\frac{1}{2}}_{>0}}$$

$$\Leftrightarrow e^x\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\le e^{2x}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cancel{e^{2x}}-\frac{1}{2}e^x\le\cancel{e^{2x}}-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x\ge 1\quad \text{VRAI car } x\ge 0$$

b) D'après a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_0^1\left(f_{\frac{1}{2}}(x)-f_0(x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{e^{2x}-\frac{1}{2}}{e^x-\frac{1}{2}}-e^x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{\cancel{e^{2x}}-\frac{1}{2}\cancel{-e^{2x}}+\frac{1}{2}e^x}{e^x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\end{aligned}\qquad \begin{aligned}&=\int_0^1\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^x}{e^x-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{e^x-1}{2e^x-1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Par exemple en posant $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t$:

$$\mathcal{A} = \int_1^e \frac{t-1}{(2t-1)\cdot t}\mathrm{d}t$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{t-1}{t(2t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{2t-1} = \frac{2at-a+bt}{t(2t-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ -a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

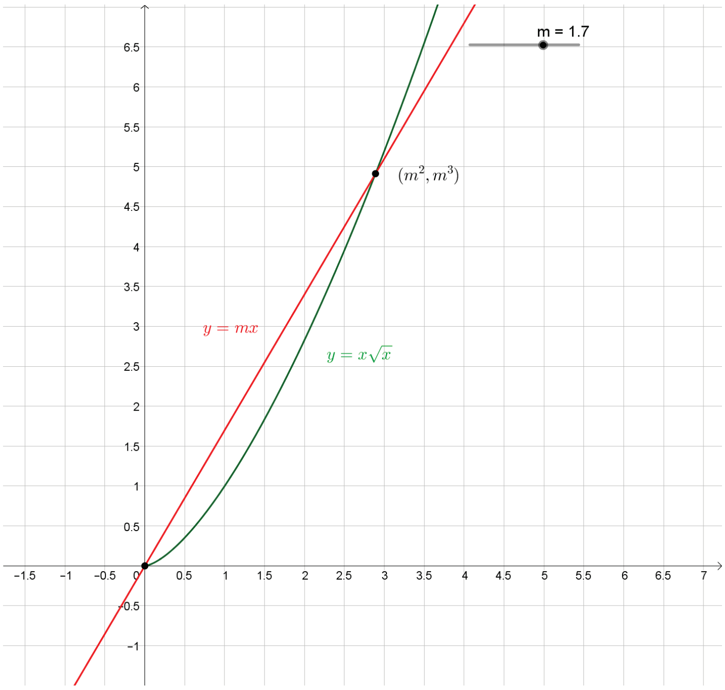
Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^e \frac{1}{2t-1}\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln t\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\ln(2t-1)\right]_1^e \\ &= \ln e - \frac{1}{2}\ln(2e-1) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\ln(2e-1) \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

Question 2 — 15 points

Déterminons les abscisses des points d'intersection des deux courbes, en tenant compte du fait que $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}_+$ et $m > 0$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \qquad \begin{aligned} & g(x) = h(x) \\ \Leftrightarrow\ & x\sqrt{x} = mx \\ \Leftrightarrow\ & x\left(\sqrt{x} - m\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x} = m \text{ ou } x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = m^2 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$



Il y a donc 2 points d'intersection : $(0,0)$ et (m^2, m^3)

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \pi\int_0^{m^2}\left[(mx)^2 - (x\sqrt{x})^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^{m^2}(m^2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[m^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{m^2} \\ &= \pi\left(\frac{m^8}{3} - \frac{m^8}{4}\right) = \frac{\pi m^8}{12} \quad \text{u.v.} \end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{V}_1 = 12\pi \Leftrightarrow m^8 = 144 = 2^4\cdot 3^2 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt{2\sqrt{3}}$

b) On a : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_{+}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}_{+}\right)$

$$y = x\sqrt{x} \Leftrightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad y = mx \Leftrightarrow x = \frac{y}{m}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_2 &= \pi \int_0^{m^3} \left[\left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 - (y / m)^2 \right] \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^{m^3} \left(y^{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{m^2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \pi \left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} - \frac{y^3}{3m^2} \right]_0^{m^3} \\
&= \pi \left(\frac{3m^7}{7} - \frac{m^7}{3} \right) = \frac{2\pi m^7}{21} \ \text{u.v.}
\end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{V}_2 = 12\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi m^7}{21} = 12\pi \Leftrightarrow m^7 = 126 \Leftrightarrow m = \sqrt[7]{126}$

Question 3 — 7 points

$$x - 2\log_4(2^x - 5) + 2\log_{\frac{1}{2}} 7 < \frac{-1}{\log_7 2} \quad \text{(I)}$$

C.E. : $2^x - 5 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_2(5) \Leftrightarrow x > \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$\mathrm{D} = \left] \frac{\ln 5}{\ln 2} \ ; +\infty \right[$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{D} : \text{(I)} &\Leftrightarrow x - \frac{\ln(2^x - 5)}{\ln 2} - \frac{2\ln 7}{\ln 2} < -\frac{\ln 7}{\ln 2} \\
&\Leftrightarrow x - \frac{\ln(2^x - 5)}{\ln 2} - \frac{\ln 7}{\ln 2} < 0 \\
&\Leftrightarrow x\ln 2 - \ln(2^x - 5) - \ln 7 < 0 \\
&\Leftrightarrow \ln 2^x < \ln 7(2^x - 5) \\
&\Leftrightarrow 2^x < 7 \cdot 2^x - 35 \\
&\Leftrightarrow 6 \cdot 2^x > 35 \\
&\Leftrightarrow 2^x > \frac{35}{6} \\
&\Leftrightarrow x > \log_2 \frac{35}{6} \\
&\Leftrightarrow x > \frac{\ln 35 - \ln 6}{\ln 2}
\end{aligned}$$

$\boxed{S = \left] \frac{\ln 35 - \ln 6}{\ln 2} ; +\infty \right[}$

G. Lorang