# Mathématiques I

## Question 1

La matrice $\mathcal{A}$ du système admet le déterminant :

$$\det\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2\,.$$

Ce polynôme admet la racine évidente $a = 1$, donc il est divisible par $a - 1$. On effectue cette division via le schéma de Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -3 | 2 |
| 1 | | 1 | 1 | -2 |
| | 1 | 1 | -2 | 0 |

Donc : $\det\mathcal{A} = (a-1)\left(a^2 + a - 2\right)$. Le $2^{e}$ facteur est un trinôme du second degré. On calcule son discriminant $\Delta = 9$ et on trouve ses racines : $a = 1$ ou $a = -2$. Donc :

5 p.

$$\det\mathcal{A} = (a-1)^2\,(a+2)\,.$$

$1^{er}$ cas : $\boxed{a \neq 1 \text{ et } a \neq -2}$

Alors $\det\mathcal{A} \neq 0$, donc le système est de Cramer. Il admet une solution unique :

$$\det\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ car } C_1 = C_3$$

$$\det\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0 \text{ car } C_2 = C_3$$

$$\det\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \det\mathcal{A} = (a-1)^2\,(a+2)$$

D'où : $S = \{(0{,}0{,}1)\}$.

5 p.

Interprétation géométrique : les équations du système sont celles de 3 plans qui se coupent en un point unique (qui est même indépendant du paramètre $a$).

$2^{e}$ cas : $\boxed{a = 1}$

Alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x+y+z=1$$

On exprime $x$ en fonction de $y$ et de $z$ :

$$S=\{(1-y-z,y,z)/\,y,z\in\mathbb{R}\}$$

3 p.

Interprétation géométrique : les équations du système sont celles de 3 plans confondus. Le plan solution passe par $A(1,0,0)$ et admet les vecteurs directeurs non parallèles $\vec{u}(-1,1,0)$ et $\vec{v}(-1,0,1)$.

3^e^ cas : $\boxed{a=-2}$

Alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 & (1) \\ x-2y+z=1 & (2) \\ x+y-2z=-2 & (3) \end{cases}$$

On résout le système par la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & (2) \\ -2 & 1 & 1 & 1 & (1)/(1)+2\cdot(2) \\ 1 & 1 & -2 & -2 & (3)/(3)-(2)) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & (2) \\ 0 & -3 & 3 & 3 & (1') \\ 0 & 3 & -3 & -3 & (3') \end{array}$$

On remarque que (1') et (3') sont équivalentes à l'équation $y-z=-1$. Donc le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ y=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(z-1)-z+1 \\ y=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1 \end{cases}$$

Donc :

$$S=\{(z-1,z-1,z)/\,z\in\mathbb{R}\}$$

5 p.

Interprétation géométrique : les équations du système sont celles de 3 plans qui se coupent suivant une droite de repère $(B,\vec{w})$ avec $B(0,0,1)$ et $\vec{w}(1,1,1)$.

## Question 2

On donne les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,1)$ et $D(3,-1,5)$ de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

(1) $M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (C_3 \,/\, C_3 - C_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y - 2(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y + z = 2$$

4 p.

Donc : $\boxed{\pi : y + z = 2}$

$D \notin \pi$ car $y_D + z_D = -1 + 5 = 4 \neq 2$

(2) Un vecteur directeur de $d$ est un vecteur normal de $\pi$, donc par exemple : $\vec{n}(0,1,1)$ On obtient donc un système d'équations paramétriques de $d$ :

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + k \\ z = 5 + k \end{cases}$$

On remplace $k = z - 5$ dans la 2ᵉ équation et on obtient un système d'équations cartésiennes de $d$ :

$$d \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer le point d'intersection de $d$ et $\pi$, on remplace les équations paramétriques de $d$ dans l'équation cartésienne de $\pi$ :

$$-1 + k + 5 + k = 2 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow k = -1$$

8 p.

D'où : $I(3,-2,4)$.

## Question 3

(1) Les vecteurs normaux des deux plans ne sont pas parallèles. En effet :

$$\vec{n}_p \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} // \vec{n}_q \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \cdot 1 \\ -5 = k \cdot (-3) \\ -3 = k \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{5}{3} \\ k = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2 p.

Impossible !

(2) L'intersection des deux plans est donc une droite $d$ dont il s'agit de déterminer un repère :

$$p \cap q \equiv \begin{cases} 2x - 5y - 3z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Posant $z = k$, $k$ paramètre réel, il vient :

$$p \cap q \equiv \begin{cases} 2x - 5y = 1 + 3k \\ x - 3y = 1 + 2k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 1 + 3k & (1) \\ x = 1 + 2k + 3y & (2) \end{cases}$$

On substitue (2) dans (1) :

$$2(1 + 2k + 3y) - 5y = 1 + 3k$$
$$\Leftrightarrow 2 + 4k + 6y - 5y = 1 + 3k$$
$$\Leftrightarrow y = -1 - k \qquad (3)$$

Puis on substitue (3) dans (2) : $x = 1 + 2k + 3(-1 - k) = -2 - k$ (4)

D'où les équations paramétriques de $d = p \cap q$ :

$$d \equiv \begin{cases} x = -2 - k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

8 p. Un repère de $d$ est donc $(A, \vec{u})$ avec $A(-2, -1, 0)$ et $\vec{u}(-1, -1, 1)$.

# Mathématiques II

## Question 4

(1) Posant $y = 2^x, y > 0$, l'équation devient : $4y + \dfrac{2}{y} = 9$.

C'est une équation rationnelle, donc on peut la résoudre avec la V200, qui donne les solutions : $y = 2$ ou $y = \frac{1}{4}$.

On revient à $x$ :

3 p.

$$2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2$$

Ainsi : $S = \{1, -2\}$.

(2) On détermine le signe du numérateur et du dénominateur :

$$e\sqrt{e} - e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} \geq e^{2x} \Leftrightarrow 2x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2x+1} - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2x+1} \geq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow 2x + 1 \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -2$$

D'où le tableau du signe :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e\sqrt{e} - e^{2x}$ | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - 8$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ |
| $\dfrac{e\sqrt{e} - e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - 8}$ | $+$ | // | $-$ | 0 | $+$ |

5 p.

Ainsi : $S = \left]-2, \frac{3}{4}\right]$.

## Question 5

(1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = "+\infty \cdot +\infty" = +\infty \Rightarrow$ pas d'A.H. à droite

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty \Rightarrow$ pas d'A.O. à droite

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x-1}} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x-1}} \lim\limits_{x\to-\infty} - e^{x+1} = 0$

  $\Rightarrow$ A.H. à gauche : $y = 0$

3 p.

(2) $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$, car $f$ est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (x+1)e^{x+1}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)\underbrace{e^{x+1}}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$, car $f'$ est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f''(x) = e^{x+1} + (x+1)e^{x+1} = (x+2)e^{x+1}$

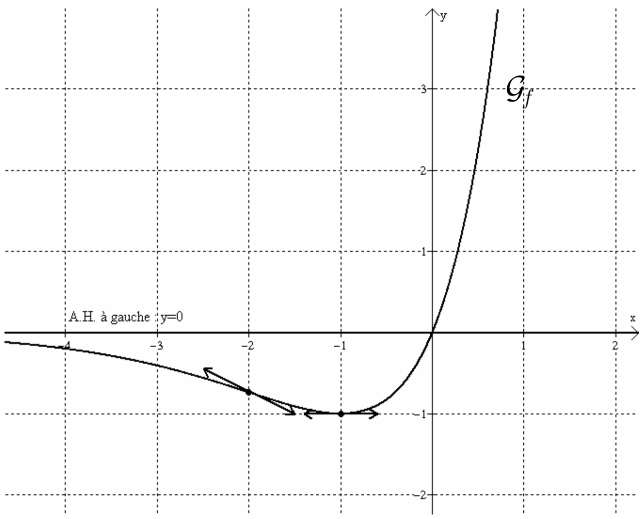
$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)\underbrace{e^{x+1}}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

D'où le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | -1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | | | -1 (m) | $+\infty$ |
| $\mathcal{G}_f$ | | $\frac{-2}{e}$ (PI) | | | |

8 p.

(3)




1 p.

G. Lorang