Mathématiques I (60 min)

Question 1 — 18 points

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a. Interpréter géométriquement l'ensemble de solutions et en donner un repère, le cas échéant.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

Question 2 — 12 (=4+8) points

On donne les points $A(1,0,2)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,1)$ et $D(3,-1,5)$ de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

(1) Etablir une équation cartésienne du plan π passant par les points A, B et C. Le point D appartient-il à ce plan ?

(2) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par D et orthogonale à π. Déterminer le point d'intersection I de d et de π.

Question 3 — 10 (=2+8) points

(1) Justifier par un argument géométrique que les plans $p \equiv 2x - 5y - 3z = 1$ et $q \equiv x - 3y - 2z = 1$ ne sont pas parallèles.

(2) Déterminer ensuite l'intersection de ces deux plans et en donner un repère.

Total : 40 points

Mathématiques II (30 min)

Question 4 — 8 (=3+5) points

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $2^{x+2} + 2^{1-x} = 9$ (septembre 2006)

(2) $\dfrac{e\sqrt{e} - e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - 8} \leq 0$

Question 5 — 12 (=3+8+1) points

On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{x+1}$.

(1) Déterminer le domaine d'existence, calculer les limites aux bord du domaine, trouver les asymptotes éventuelles à $\mathcal{G}_f$.

(2) Calculer les dérivées première et seconde, déterminer les extréma et les points d'inflexion, dresser un tableau de variations avec l'étude de la concavité de $\mathcal{G}_f$.

(3) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

(septembre 2006)

Total : 20 points

G. Lorang