1C1 — **Corrigé du devoir de mathématiques II,1** — 16.02.07

Question 1

(1)

2) a) $z^3 = -4 + 4i$

$\Leftrightarrow r^3 \cdot \text{cis}\, 3\varphi = 4\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 4\sqrt{2} \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{32} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$z_0 = \sqrt[6]{32} \cdot \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$

$z_1 = \sqrt[6]{32}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{12}$

$z_2 = \sqrt[6]{32}\ \text{cis}\ \frac{19\pi}{12}$

(2)

b) $P(z)$ est divisible par $z + 3i$

$\Leftrightarrow P(-3i) = 0$

$\Leftrightarrow (-3i)^4 + 3i \cdot (-3i)^3 + (4m - 8i) \cdot (-3i) + 12m = 0$

$\Leftrightarrow -12mi - 24 + 12m = 0$

$\Leftrightarrow 12m(1-i) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{24}{12 \cdot (1-i)}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{m = 1+i}}$

(3)

Pour $m = 1+i$, $P(z) = z^4 + 3i\, z^3 + (4-4i)z + 12(1+i)$.

HORNER :

	1	3i	0	4-4i	12+12i
-3i		-3i	0	0	-12-12i
	1	0	0	4-4i	0

D'où : $P(z) = 0$

$\Leftrightarrow (z + 3i) \cdot (z^3 + 4 - 4i) = 0$

$\Leftrightarrow z = -3i$ ou $z^3 = -4 + 4i$

$S = \left\{ -3i\ ;\ \sqrt[6]{32}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \sqrt[6]{32}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{12}\ ;\ \sqrt[6]{32}\ \text{cis}\ \frac{19\pi}{12} \right\}$

Question 2

(1) C.E. : $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f =]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{"1-\infty"}{0^+} = \frac{"-\infty"}{0^+} = -\infty \quad \Rightarrow \text{A.V. : } x=1\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \Rightarrow \text{A.H. : } y=1\,.$$

(2) $\operatorname{dom} f' =]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)(x-1)-(x+\ln(x-1))\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1+1-x-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

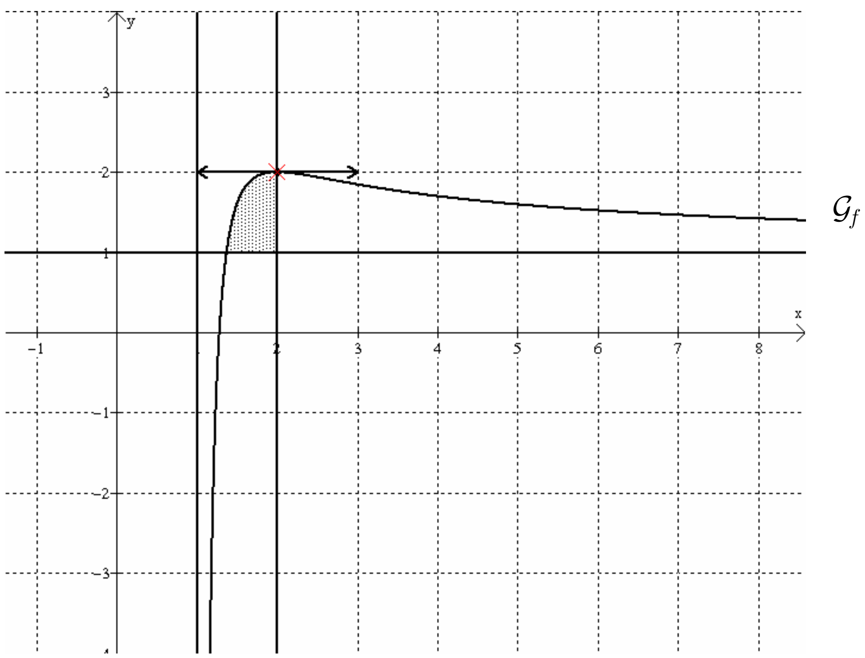
$$= -\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<0 \Leftrightarrow x-1<1 \Leftrightarrow x<2$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2 (m)	↘	1

(3) Représentation graphique



(4) Pour déterminer la borne inférieure de l'intégrale, il faut résoudre :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x + \ln(x-1) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x-1) = -1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = e^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{e} \cong 1,37 \end{aligned}$$

L'aire à calculer est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} f(x) - 1 \mathrm{d}x \\ &= \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \frac{x+\ln(x-1)}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x + \int_{1+\frac{1}{e}}^{2} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \\ &= [\ln t]_{e^{-1}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} u' u \,\mathrm{d}t \\ &= \ln 1 - \ln e^{-1} + \left[\frac{u^2}{2}\right]_{e^{-1}}^{1} \\ &= 1 + \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_{e^{-1}}^{1} \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par substitution :

$t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$

$\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

x	$1+e^{-1}$	2
t	e^{-1}	1

$u = \ln(t), u' = \frac{1}{t}$

Question 3

$I = \int_{-\pi}^{\pi/2} e^{-x} \sin 3x \, dx$ ipp pos : $u(x) = \sin 3x$, $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 3\cos 3x$, $v(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-e^{-x} \sin 3x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + 3 \underbrace{\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 3x \, dx}_{= I_1}$ ipp pos : $u_1(x) = \cos 3x$, $v'(x) = e^{-x}$

$u_1'(x) = -3\sin 3x$, $v(x) = -e^{-x}$

$I_1 = \left[-e^{-x} \cos 3x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - 3 \underbrace{\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 3x \, dx}_{= I}$

$I = \left[-e^{-x} \sin 3x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + 3\left[-e^{-x} \cos 3x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - 9I \Leftrightarrow 10 I = e^{-\frac{\pi}{2}} - 3e^{\pi} \Leftrightarrow I = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - 3e^{\pi}}{10}$

$$J = \int_1^0 \frac{x^2 + 4x + 13}{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{V200}{=} \int_1^0 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - 2\int_1^0 \frac{1}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

$u = x - 2$	$v = x + 3$
$u' = 1$	$v' = 1$

$$= \int_1^0 \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x - 2\int_1^0 v' \cdot v^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\ln|u| - 2 \cdot \frac{v^{-1}}{-1}\right]_1^0$$

$$= \left[\ln|x-2| + \frac{2}{x+3}\right]_1^0$$

$$\underset{V200}{=} \ln 2 + \frac{1}{6}$$

$$K = \int_{-1}^{\frac{4}{3}} x(5-3x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}\int_8^1 \frac{5-t}{3} \cdot t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^8 5t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}\right]_1^8$$

$$\underset{V200}{=} \frac{17}{84}$$

Par substitution :

$t = 5 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{5-t}{3}$

$\mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

x	-1	$\frac{4}{3}$
t	8	1

$$L = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$u = 3x^2 + 1$	$v = \sqrt{3}x$
$u' = 6x$	$v' = \sqrt{3}$

$$= \frac{1}{6}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{6x}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{v'}{v^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln\left(3x^2+1\right)\right]_{\frac{1}{3}}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}x\right)\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$\underset{V200}{=} \frac{\ln 3}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

Question 4 — 11 (=4+7) points

(1) Soit $f(x) = x^3$, $g(x) = 19x - 30$ et $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 19x + 30$.

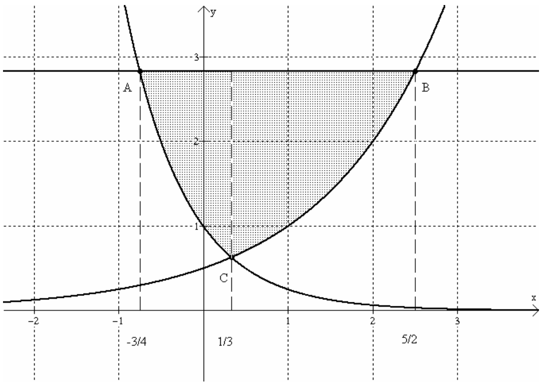
- $f(x) = g(x) \underset{V200}{\Leftrightarrow} x = -5$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.
- $\int h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{19x^2}{2} + 30x$.
- L'aire cherchée vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left|\int_{-5}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{2}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{19x^2}{2} + 30x\right]_{-5}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{19x^2}{2} + 30x\right]_{2}^{3}\right| \\
&\underset{V200}{=} \frac{1029}{4} + \frac{5}{4} \\
&= \frac{1034}{4} = \frac{517}{2}
\end{aligned}$$

(2) Soit

- $f(x) = \frac{1}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (fonction exponentielle de base $\frac{1}{4}$)
- $g(x) = 2\sqrt{2}$ (fonction constante)
- $h(x) = 2^{x-1}$ (fonction exponentielle de base 2, translatée d'une unité vers la droite)

Ces fonctions ont été largement étudiées dans le cours. On peut donc les représenter graphiquement sans autre explication :



Cherchons les abscisses des points d'intersection des graphes :

Pour A : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^{-x} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$

Pour B : $h(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Pour C : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{x-1} \Leftrightarrow -2x = x - 1 \Leftrightarrow -3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

L'aire cherchée vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{3}} 2\sqrt{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^x \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} 2\sqrt{2} - 2^{x-1}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{3}} 2\sqrt{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^x \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot 2^x\mathrm{d}x \\
&= \left[2\sqrt{2}x - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\right]_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{3}} + \left[2\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} \\
&\underset{V200}{=} -\frac{3\sqrt{2}}{\ln 2} + \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{4\ln 2} + \frac{13\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(utiliser expand)} \\
&\cong 4{,}435 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

G. Lorang