1C1	Devoir de mathématiques II,2	23.03.07

Question 1 — 17 (=6+6+5) points

Remarque : Pour chacune des questions suivantes on demande de préciser la nature des épreuves en termes de l'analyse combinatoire.

(1) On tire simultanément 6 boules dans une urne contenant 4 boules blanches et 5 boules noires. Calculer la probabilité des événements suivants :

$A =$ « tirer au moins 3 boules blanches »

$B =$ « tirer au plus 2 boules noires »

(2) Les plaques d'immatriculation des voitures luxembourgeoises sont constituées de deux lettres suivies de 4 chiffres. Combien y a-t-il de plaques :

a) contenant au moins une fois la lettre A, mais pas le chiffre 2 ?

b) contenant 4 chiffres distincts ?

(3) Neuf personnes dont 6 femmes forment une file d'attente devant un guichet de la gare. Calculer la probabilité des événements suivants :

$C =$ « les trois hommes se trouvent l'un derrière l'autre »

$D =$ « chaque homme est suivi de deux femmes »

Question 2 — 20 (=12+4+4) points

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\sqrt{x}}$.

(1) Faire une étude complète de f : a) $\operatorname{dom} f$ et $\operatorname{dom}_c f$, b) signe de $f(x)$, c) limites aux bornes du domaine de f et asymptotes éventuelles, d) étude des variations (sans concavité), e) représentation graphique.

(2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathcal{G}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$.

(3) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface définie dans la question précédente.

Question 3 23 (=3+3+6+2+6+3) points

***Remarque** : Dans cette question, la V200 peut être utilisée sans aucune restriction. La correction tiendra compte de la clarté des raisonnements et de la rédaction.*

Le diamètre du tronc d'un certain type d'épicéa a été étudié sur une période de quelque 200 ans. Voici le tableau des différentes mesures :

Années (*)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Diamètre (m)	0,05	0,15	0,41	0,76	1,07	1,19	1,23	1,24	1,25

(1) Représenter graphiquement par des croix les données dans un repère approprié.

(2) On veut modéliser le diamètre de l'épicéa en fonction du temps par une fonction f de type logistique :

$$f(t) = \frac{1}{a + be^{-rt}}, \ t \geq 0,$$

où a, b et r sont des paramètres réels ***strictement positifs***.

a) Montrer que l'on peut prendre $a = 0{,}8$ et $b = 19{,}2$ en utilisant les épaisseurs de l'épicéa lorsque $t = 0$ et $t \to +\infty$.

b) Etudier ***le sens de variation*** et la ***concavité*** de f sur $\mathbb{R}_+$ en remplaçant les paramètres a et b par les valeurs ci-dessus. En déduire que $\mathcal{G}_f$ possède un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

c) Etudier la vitesse de croissance du diamètre de l'épicéa sur $\mathbb{R}_+$ (dans l'hypothèse du modèle f) et préciser l'importance du point I dans ce contexte.

d) Pour déterminer le paramètre r, on approche la courbe réelle représentant le diamètre de l'épicea sur l'intervalle $[50, 75]$ par une droite. En utilisant le tableau des mesures, établir une équation cartésienne de cette droite, puis déterminer r de façon à ce que le point d'inflexion I appartienne à cette droite.

e) Juger finalement de la qualité du modèle basé sur la fonction f ainsi obtenue.

G. Lorang