1C1 Corrigé du devoir de mathématiques II,3 2/05/07

Question 1

(1) Soit $Z = x + iy$ une r.c.c. de $2i$.

On a : $Z^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$

$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$

D'après (3), $Z = 1 + i$ ou $Z = -1 - i$.

II $\boxed{P(z) = z^3 + (3-4i)z^2 + (-1-11i)z - 6i - 6}$

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$

Soit $z_0 = \cancel{a} + bi$, $b \in \mathbb{R}$ cette racine imaginaire pure.

$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (3-4i)(bi)^2 + (-1-11i)bi - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow b^3 i^3 + (3-4i)b^2 i^2 + (-1-11i)bi - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 3b^2 + 4b^2 i - bi + 11b - 6i - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-3b^2 + 11b - 6}_{A}) + (\underbrace{-b^3 + 4b^2 - b - 6}_{B}) \cdot i = 0$

$\Leftrightarrow A + B \cdot i = 0$

$\Leftrightarrow A = 0$ et $B = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b^2 + 11b - 6 = 0 \\ -b^3 + 4b^2 - b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 - 11b + 6 = 0 & (1) \\ b^3 - 4b^2 + b + 6 = 0 & (2) \end{cases}$

Rés. de (1) : $3b^2 - 11b + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 72 = 49 > 0$

$b_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11+7}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$ ✓

$b_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11-7}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (à écarter)

Dans (2) : $b = 3$: $27 - 36 + 3 + 6 \overset{!}{=} 0$

$b = \frac{2}{3}$: $\frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{2}{3} + 6 \neq 0$

D'où la solution : $z_0 = bi = \boxed{3i}$

$P(z)$ est divisible par $z - z_0 = z - 3i$:

H	1	$3-4i$	$-1-11i$	$-6-6i$
$3i$	↓	$3i$	$3+9i$	$6+6i$
	1	$3-i$	$2-2i$	0

$P(z) = (z-3i) \cdot Q(z)$

où $Q(z) = z^2 + (3-i)z + 2 - 2i$

Racines de $Q(z)$: $\Delta = (3-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-2i)$

$= 9 - 6i + i^2 - 8 + 8i$ $(i^2 = -1)$

$= \boxed{2i}$

$\overset{!}{=} (1+i)^2$

Une r.c de Δ : $1+i$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(3-i) + (1+i)}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + i + 1 + i}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i \\ z_2 = \frac{-(3-i) - (1+i)}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \cancel{+i} - 1 \cancel{-i}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Finalement : $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{3i ; -1+i ; -2\}}$

Question 2

1)

$$\left(2x^3+\frac{5}{x}\right)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\,(2x^3)^{10-i}\left(\frac{5}{x}\right)^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\, 2^{10-i}\cdot 5^{i}\; x^{30-4i}$$

$30-4i = 6 \Leftrightarrow i=6$

le terme en x^6 est :

$$C_{10}^{6}\; 2^4\cdot 5^6\cdot x^6 = \frac{10!}{6!\,4!}\,25\cdot 10^4\cdot x^6 = 52\,500\,000\, x^6$$

2)

© $\begin{pmatrix}6R\\8N\end{pmatrix} \to 4$

4R	$\to$ 16 EUR
3R 1N	$\to$ 9 EUR
2R 2N	$\to$ 2 EUR
1R 3N	$\to$ −5 EUR
4N	$\to$ −12 EUR

Calcul des proba : cas poss. $C_{14}^{4} = 1001$

$x_1 = 16$ cas fav. $C_6^4\cdot C_8^0 = 15\cdot 1 = 15$ $p_1 = 0{,}0150$

$x_2 = 9$ cas fav. $C_6^3\cdot C_8^1 = 20\cdot 8 = 160$ $p_2 = 0{,}1598$

$x_3 = 2$ cas fav. $C_6^2\cdot C_8^2 = 15\cdot 28 = 420$ $p_3 = 0{,}4196$

$x_4 = -5$ cas fav. $C_6^1\cdot C_8^3 = 6\cdot 56 = 336$ $p_4 = 0{,}3357$

$x_5 = -12$ cas fav. $C_6^0\cdot C_8^4 = 1\cdot 70 = 70$ $p_5 = 0{,}0699$

loi de probabilités de X :

x_i	16	9	2	−5	−12
$p(X=x_i)$	0,0150	0,1598	0,4196	0,3357	0,0699

Espérance de X : $E(X) = 0$

Question 3

(1) Les conditions données sont :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 200 \\ f(10) = 168{,}4 \\ f'(10) = 5{,}69 \end{cases}$$

Or, comme

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \underset{V200}{=} a\,,$$

la 1re condition donne immédiatement $a = 200$. On résout avec la V200 le système formé par les deux dernières équations et on trouve :

$$b = 0{,}95645 \text{ et } k = 0{,}18006\,.$$

Donc, en prenant $a = 200$, $b = 0{,}956$ et $k = 0{,}18$, on obtient :

$$f(t) \underset{V200}{=} 200 - 191{,}2 \cdot 0{,}835^t$$

(2) On résout : $f(t) = 100$ et on trouve $t \simeq 3{,}6$ ans. La vitesse de croissance d'un flétan de 3,6 ans est : $f'(3{,}6) \simeq 18$ cm/an.

(3) D'abord, la longueur d'un flétan de 5 ans est : $f(5) \simeq 122{,}3$ cm. Donc le poids d'un flétan de 5 ans est $p(1{,}223) \simeq 18{,}98$ kg.

(4) $\lim\limits_{l\to 2} p(l) = p(2) \simeq 83$ kg.