Nom : .... Prénom : ....

1CD1 Devoir de mathématiques I,1 18.10.2021

Durée : 110' ***Calculatrice autorisée***

Présentation parfaite = bonus de 2 points

Question 1 8 points

Soit le nombre complexe $z=\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{12}}{(4-4i)^6}$.

Ecrire z d'abord sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

(*EFES : juin 2021*)

Question 2 16 (=7+7+2) points

Soit les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}\,i}{i\left(1-\sqrt{3}\,i\right)}-\frac{3\sqrt{3}\,i+3}{4i},\qquad z_2=\frac{-3\sqrt{2}}{1-i}\qquad \text{et}\qquad Z=\frac{z_1^{\,2}}{z_2}$$

(1) Ecrire z_1 et z_2 sous leur forme algébrique, puis sous leur forme trigonométrique.

(2) Calculer Z à l'aide des formes algébriques, puis à l'aide des formes trigonométriques.

(3) Déduire des calculs précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

(*EFES : juin 2014*)

Question 3 23 (=4+1+5+6+2+5) points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=e^{-x}(4x^2-1)$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

(1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f, calculer ensuite les limites aux bornes du domaine et déterminer toutes les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.

(2) Déterminer les racines de f.

(3) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau des variations. Préciser les extrema éventuels (valeurs approchées à 10^{-2} près).

(4) Calculer la dérivée seconde de f en en déduire le tableau de concavité de f. Préciser les points d'inflexion éventuels (valeurs approchées à 10^{-2} près).

(5) Déterminer une équation de la tangente t à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ (pas de valeurs approchées !).

(6) Représenter graphiquement f et la tangente t dans un repère orthonormé du plan (avec tableau des images des entiers de –2 à 6).

(*EFES : juin 2021*)

Tournez s.v.p.

Question 4 13 (=3+4+6) points

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(1) $625^{-x} \geq 0,2^{3x+1}$

(2) $\dfrac{e^{x^2}}{e\sqrt{e}} \geq \sqrt{e} \cdot \left(e^{x-1}\right)^3$

(3) $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x} - \dfrac{9}{4}\right)\left(27 - 3^{-x}\right) \leq 0$

G. Lorang