Nom : .... Prénom : ....

1CD1 Devoir de mathématiques 3.01.2022

Durée : 110' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 — 8 points

Soit le nombre complexe $z = 8(1+i)^6$.

Déterminer les racines cubiques complexes de z :

a) sous forme trigonométrique,

b) puis sous forme algébrique.

Question 2 — 10 (=7+3) points

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 16\sqrt{3} - 16i$. On demande uniquement la forme trigonométrique des solutions.

(2) Représenter ensuite dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les solutions trouvées.

Question 3 — 7 (=3+4) points

(1) Montrer que pour tout réel x strictement positif et pour tout réel r : $\log_a\left(x^r\right) = r\log_a x$

(2) Compléter par les C.E. et la formule, puis démontrer :

a) si a est un réel … alors pour tout réel x … : $(\log_a x)' = \ldots$

b) si a est un réel … alors pour tout réel x : $\left(a^x\right)' = \ldots$

Question 4 — 8 (=4+4) points

Calculer la dérivée des fonctions suivantes. Préciser pour chacune d'elles le domaine d'existence et de dérivabilité.

(1) $f(x) = \sqrt{\log_3(2x+1)}$

(2) $f(x) = \ln^2(4x^2 - 4x - 3)$

Question 5 — 14 (=5+3+6) points

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

(1) Déterminer le domaine de définition et f et étudier son comportement asymptotique.

(2) Etudier la position de la courbe représentative de f par rapport à une asymptote horizontale ou oblique éventuelle.

(3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Tournez s.v.p.

Question 6 13 (=6+7) points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(1) $\dfrac{2^x+4}{2^{x-1}+2}=2^{x+1}$

(2) $\log_6(x+2)-\log_{\sqrt{6}}(3-2x)\geq\log_{\frac{1}{6}}7$

G. Lorang