Nom : .... Prénom : ....

1CD1 Devoir de mathématiques II,2 25.04.2022

Durée : 115' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 15 (=7+8) points

(1) Soit le nombre complexe

$$z=\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}}{(4-4i)^6}$$

Ecrire z d'abord sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

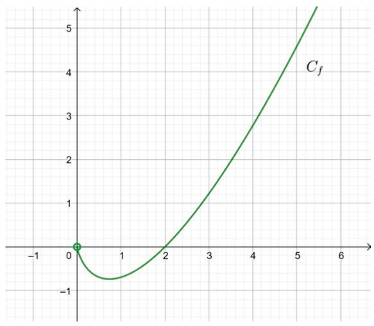
(2) Déterminer sous forme trigonométrique les racines cinquièmes complexes du nombre complexe $Z=512\sqrt{3}-512i$ et représenter dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les racines trouvées.

Question 2 6 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right),$$

dont la courbe est donnée sur la figure ci-contre.



Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. (On demande la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.)

Question 3 25 (=13+4+8) points

Soit la fonction f définie par : $f(x)=(2x+1)^2e^{-x}$.

(1) Etudier f : a) domaines d'existence et de continuité b) racines de f c) limites aux bornes du domaine et asymptotes éventuelles d) dérivée et tableau de variation avec valeurs exactes des extrema.

(2) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

(3) Calculer l'aire de la partie fermée du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=2$. (Recommandation : calculer d'abord une primitive de $f(x)$.)

Question 4 14 (=8+6) points

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}\geq\log_2\dfrac{1}{(x+3)^2}$

(2) $9+10\cdot 5^{-1-x}=5^{x+1}$

G. Lorang