Question 1

(1) Voici le tableau complété :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	-3	$-\infty$	4	0^-	$-\infty$	$-\infty$	7	0^+
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$+\infty$	0^+	0^-	$+\infty$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	0	0^-
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	4	$+\infty$	f.i.	$-\infty$	7	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$-\infty$	f.i.	0^-	f.i.	$-\infty$	$-\infty$	0	0^-
$\lim\limits_{x\to a} (f/g)(x)$	0^-	$-\infty$	$-\infty$	0^-	f.i.	$-\infty$	f.i. $\pm\infty$	f.i.

(2) Voir cours.

Question 2

(1) $[-2,+\infty[\setminus \{-1,1\}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas.

Interprétation graphique : Les droites d'équations $x=1$ et $x=-1$ respectivement sont des asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$.

(3) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ n'existe pas, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0.$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

Question 3 — 26 (=4+6+8+8) points

(1) $$\lim_{x\to 3} \frac{2x-7}{5x^2-45} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-7}{5\left(x^2-9\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-7}{5(x-3)(x+3)} = \text{ f.i. } \frac{-1}{0}.$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x-7}{5x^2-45} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-7}{5(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{5\cdot 0^+\cdot 6} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x-7}{5x^2-45} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-7}{5(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{5\cdot 0^-\cdot 6} = +\infty$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	-	0	+

Donc : $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-7}{5x^2-45}$ n'existe pas.

Interprétation graphique : $A.V.: x=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{6-x}}{6+5x-x^2} = \text{ f.i.}\dfrac{0}{0}$

On commence par factoriser le dénominateur :

$$6+5x-x^2 = -(x+1)(x-6) = (x+1)(6-x)\,.$$

On remarque que la limite à calculer est en fait une limite à gauche car la C.E. du numérateur est : $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$6-x$	$+$	0	-

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{6-x}}{6+5x-x^2} &= \lim_{x\to 6^-}\frac{\sqrt{6-x}}{(6-x)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 6^-}\frac{1}{\sqrt{6-x}\,(x+1)}\,.\\ &= \frac{1}{0^+\cdot 7} = +\infty\end{aligned}$$

Interprétation graphique : *A.V.* : $x=6$.

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|4-x^2\right|}{x^3-x^2-4} = \text{ f.i. }\dfrac{0}{0}.$

On factorise le dénominateur : $d(x) = x^3-x^2-4$.

Comme $d(2)=0$, $d(x)$ est divisible par $x-2$. Le schéma de Horner donne :

$$d(x) = (x-2)\left(x^2+x+2\right).$$

D'autre part :

$$\left|4-x^2\right| = \left|(2-x)(2+x)\right| = |2-x|\cdot|2+x|\,.$$

et

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	0	$x-2$

Donc :

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\left|4-x^2\right|}{x^3-x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot|2+x|}{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x+2\right)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\left|4-x^2\right|}{x^3-x^2-4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(2-x)\cdot|2+x|}{(x-2)\left(x^2+x+2\right)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x-2)}\cdot|2+x|}{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x+2\right)} = -\frac{1}{2}$$

Comme les limites à gauche et à droite diffèrent, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left|4-x^2\right|}{x^3-x^2-4}$ n'existe pas.

Interprétation graphique : La courbe d'équation $y = \dfrac{\left|4-x^2\right|}{x^3-x^2-4}$ présente un « saut » en l'abscisse 2.

(4) C.E. : $x \geq -\dfrac{9}{2}$ et $x \geq 0$ et

$$x \neq \sqrt{x} \,/()^2,\ x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 \neq x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

En résumé : $x > 0$ et $x \neq 1$.

La limite à calculer est donc une limite à droite !

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+9}-3}{x-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{2x+9}-3\right)\left(\sqrt{2x+9}+3\right)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})\left(\sqrt{2x+9}+3\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x+9-9)(x+\sqrt{x})}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{2x+9}+3\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x}\,(x+\sqrt{x})}{\cancel{x}\,(x-1)\left(\sqrt{2x+9}+3\right)} \\
&= \frac{2\cdot 0}{-1\cdot 6} = 0
\end{aligned}$$

Interprétation graphique : La courbe d'équation $y = \dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{x-\sqrt{x}}$ présente un « trou » en (0,0).

G. Lorang