Question 1

Voir livre.

Question 2

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x \cdot \sqrt{\left(10 - x - 3x^2\right)^3}}{\left|x^2 + 2x\right|}.$$

(1) C.E. :

$$\begin{cases} \left(10 - x - 3x^2\right)^3 \geq 0 & (1) \\ x^2 + 2x \neq 0 & (2) \end{cases}$$

- La condition (1) est équivalente à $10 - x - 3x^2 \geq 0$. On détermine donc les racines du trinôme $10 - x - 3x^2$: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{5}{3}$. On fait le tableau du signe du trinôme et on en déduit que $\mathcal{D}_1 = \left[-2, \frac{5}{3}\right]$.
- La condition (2) est : $x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -2$.

D'où : $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

En conclusion : $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left]-2, \frac{5}{3}\right] \setminus \{0\}$.

(2) On utilise la factorisation : $10 - x - 3x^2 = -3(x+2)\left(x - \frac{5}{3}\right) = (x+2)(5-3x)$

x	-2		0		$\frac{5}{3}$
$\left\|x^2+2x\right\|$	0	$-x^2 - 2x$	0	$x^2 + 2x$	
$f(x)$	/	$\frac{x \cdot \sqrt{(x+2)^3(5-3x)^3}}{-x(x+2)}$ $= -\frac{(x+2)(5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)}}{(x+2)}$ $= -(5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)}$	/	$\frac{x \cdot \sqrt{(x+2)^3(5-3x)^3}}{x(x+2)}$ $= \frac{(x+2)(5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)}}{(x+2)}$ $= (5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)}$	

Remarque : On a vu que si $-2 \leq x \leq \frac{5}{3}$ alors $(x+2)(5-3x) \geq 0$. Ceci donne le droit d'utiliser dans le tableau la formule $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$, pour $a \geq 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} -(5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)} = 0$.

Interprétation graphique : $\mathcal{C}_f$ admet un « trou » en $(-2, 0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -(5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)} = -5\sqrt{10}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (5-3x)\sqrt{(x+2)(5-3x)} = 5\sqrt{10}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Interprétation graphique : $\mathcal{C}_f$ admet un « saut » en l'abscisse 0.

Question 3

(1) C.E. :

$$\begin{cases} 4-4x+x^2 \geq 0 & (1) \\ x-1 \geq 0 & (2) \\ x \neq 2\sqrt{x-1} & (3) \end{cases}$$

- La condition (1) est équivalente à $(2-x)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai.
- La condition (2) est : $x \geq 1$, donc $\mathcal{D}_2 = [1,+\infty[$.
- Pour $x \geq 1$, la condition (3) devient, en élevant les 2 membres au carré : $x^2 \neq 4(x-1) \Leftrightarrow x^2-4x+4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

  Donc : $\mathcal{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

En conclusion : $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = [1,+\infty[\setminus \{2\}$.

(2) On a : $\sqrt{4-4x+4x^2} = \sqrt{(2-x)^2} = |2-x|$. Or :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	0	$x-2$

Donc :

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{\left[x^2-4(x-1)\right]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2\sqrt{x-1}}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} -\frac{\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{x-2} = -\frac{4}{0^-} = +\infty$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$.

Interprétation graphique : $\mathcal{C}_g$ admet une A.V. d'équation $x = 2$.

Solution plus élégante : On pouvait remarquer que :

$$\left(\forall x \in \mathcal{D}_g\right) \quad g(x) = \frac{|x-2|}{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{|x-2|\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}$$

$$= \frac{|x-2|\left(x+2\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x-1}}{|x-2|}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty\,.$$

G. Lorang