Question 2

(1) $\lim_{x\to+\infty} 1-2\sqrt{x-8} = -\infty$. En effet, soit $B>0$ et $x>8$. On a alors :

$$1-2\sqrt{x-8} < -B$$
$$\Leftrightarrow -2\sqrt{x-8} < -B-1 \;/\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-8} > B+1 \;/:2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-8} > \frac{B+1}{2} \;/(\;)^2$$
$$\Leftrightarrow x-8 > \left(\frac{B+1}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x > 8+\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$$

En choisissant $A = 8+\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ (qui est bien >8), on a prouvé que :

$$(\forall B>0)(\exists A>0)\,/\,x>A \Rightarrow 1-2\sqrt{x-8} < -B\,.$$

En d'autres termes : $\lim_{x\to+\infty} 1-2\sqrt{x-8} = -\infty$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$. En effet, soit $\varepsilon>0$ et $x<-1$. On a :

$$\left|\frac{2x+1}{x+1}-2\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x+1}\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x+1}\right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \;/\,\text{inverser}$$
$$\Leftrightarrow |x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Leftrightarrow -x-1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{car } x+1<0)$$
$$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon}+1 \;/\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x < -1-\frac{1}{\varepsilon}$$

En choisissant $-A = -1-\frac{1}{\varepsilon}$ (qui est bien <-1), on a prouvé que :

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists A>0)\,/\,x<-A \Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x+1}-2\right| < \varepsilon\,.$$

En d'autres termes : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$.

Question 3

Il suffit dans chaque cas de déterminer les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

(1) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^2-5x+8}{(5x-2)(1-4x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^2}{-20x^2} = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}$

(2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-3x^3}{(2x+1)^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3}{16x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{16x} = 0$

(3) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(-2x^2+x+1\right)^6\left(3x^3-2x+1\right)^5}{\left(1-3x^4\right)^5(7-2x)^7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^6x^{12}3^5x^{15}}{-3^5x^{20}\left(-2^7x^7\right)} = \frac{2^6\cdot 3^5}{3^5\cdot 2^7} = \frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-2x)^{-3}}{(x+2)^{-7}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+2)^7}{(1-2x)^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^7}{-8x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^4}{8} = -\infty\,.$

Question 4 — 18 (=10+8) points

(1) Les limites en $\pm\infty$ ont un sens puisque les expressions sous les radicaux sont positives au voisinage de $\pm\infty$, étant donné qu'elles sont du 2^e^ degré et que les coefficients de x^2 sont tous les deux > 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{2x^2+x-1} - \sqrt{(x+1)(2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2+5x+3}\right)\left(\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+5x+3}\right)}{\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+5x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(2x^2+x-1\right)-\left(2x^2+5x+3\right)}{\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+5x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x-4}{|x|\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x}{2\sqrt{2}\,|x|}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x}{\pm 2\sqrt{2}x}$$

$$= \mp\frac{4}{2\sqrt{2}} = \mp\sqrt{2}$$

(2) Les limites en $\pm\infty$ ont un sens puisque le domaine de la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}}$ est $\mathbb{R}^*$.

a) Pour $x > 0$, on a :

$$0 \le \cos^2 x \le 1 \,/\cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

$$0 \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

D'après le théorème du sandwich, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} = 0\,.$$

b) Pour $x < 0$, on a :

$$0 \le \cos^2 x \le 1 \,/\cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \ge \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} \le 0$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

D'après le théorème du sandwich, on a donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{x}} = 0\,.$$

G. Lorang