Question 2

(1) $f(x)=\sqrt{\sin^3(4x)}$

a) C.E. :

$$\begin{aligned}\sin(4x)\geq 0 &\Leftrightarrow k\cdot 2\pi \leq 4x \leq \pi + k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow k\cdot\tfrac{\pi}{2}\leq x\leq \tfrac{\pi}{4}+k\cdot\tfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Donc : $\operatorname{dom} f=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[k\cdot\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\operatorname{dom}_d f=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[k\cdot\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\operatorname{dom} f$.

c) On a : $(\forall x\in\operatorname{dom} f)\quad f(x)=\sin^{\frac{3}{2}}(4x)$.

Donc : $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sin^{\frac{1}{2}}(4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4=6\sqrt{\sin(4x)}\cdot\cos(4x)$.

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1-3x}{2x+1}\right)^2$

a) C.E. : $2x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\frac{1}{2}$. Donc : $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) $\operatorname{dom} f'=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\operatorname{dom} f$.

c) $f'(x)=2\left(\dfrac{1-3x}{2x+1}\right)\cdot\dfrac{-3(2x+1)-(1-3x)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{10(3x-1)}{(2x+1)^3}$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{3-\sqrt{1-2x}}$

a) C.E. :

$$\begin{cases}1-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}\\ \sqrt{1-2x}\neq 3\Leftrightarrow 1-2x\neq 9\Leftrightarrow x\neq -4\end{cases}$$

Donc : $\operatorname{dom} f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\setminus\{-4\}$.

b) $\operatorname{dom}_d f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\setminus\{-4\}$.

c) On a :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\dfrac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}}\left(3-\sqrt{1-2x}\right)+\left(\sqrt{1-2x}-1\right)\dfrac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}}}{\left(3-\sqrt{1-2x}\right)^2}\\ &=\frac{-3+\cancel{\sqrt{1-2x}}-\cancel{\sqrt{1-2x}}+1}{\sqrt{1-2x}\left(3-\sqrt{1-2x}\right)^2}\\ &=\frac{-2}{\sqrt{1-2x}\left(3-\sqrt{1-2x}\right)^2}\end{aligned}$$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[4]{\left(1-x^2\right)^3}$

a) C.E. : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Donc $\operatorname{dom} f = [-1, +1]$.

b) Comme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[4]{\left(1-x^2\right)^3} \\ &= (1-x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{3}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}} \\ &= (1-x)^{\frac{13}{12}}(1+x)^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

on a : $\operatorname{dom} f' =]-1,1]$ (car $\frac{13}{12} > 1$ et $\frac{3}{4} < 1$).

c) On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{13}{12}(1-x)^{\frac{1}{12}}(-1)(1+x)^{\frac{3}{4}} + (1-x)^{\frac{13}{12}}\tfrac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{4}} \\ &= \tfrac{1}{12}(1-x)^{\frac{1}{12}}(1+x)^{-\frac{1}{4}}\left[-13(1+x) + 9(1-x)\right] \\ &= \frac{\sqrt[12]{1-x}\,(-22x-4)}{12\sqrt[4]{1+x}} = -\frac{\sqrt[12]{1-x}\,(11x+2)}{6 \cdot \sqrt[4]{1+x}} \end{aligned}$$

(5) $f(x) = \dfrac{2|x| - 1}{|2x+1| - 2}$

a) C.E. : $|2x+1| \neq 2 \Leftrightarrow 2x+1 \neq 2$ et $2x+1 \neq -2 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{3}{2}$.

Donc : $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$.

b) $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right\}$

Remarque : le fait que f est dérivable en $-\frac{1}{2}$ sera justifié ci-dessous !

c) Ecrivons $f(x)$ sans valeur absolue et en déduisons sa dérivée :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$\lvert x\rvert$	-x		-x		-x	0	x		x
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$		$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$		$2x+1$
$f(x)$	$\dfrac{2x+1}{2x+3}$	//	$\dfrac{2x+1}{2x+3}$	0	$\dfrac{-2x-1}{2x-1}$	1	1	//	1
$f'(x)$	$\dfrac{4}{(2x+3)^2}$	//	$\dfrac{4}{(2x+3)^2}$	1	$\dfrac{4}{(2x-1)^2}$	//	0	//	0

Remarque :

$$\begin{cases} f'_D\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = 1 \\ f'_G\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{cases} f'_D(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 \\ f'_G(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow f'(0) \text{ n'existe pas}$$

G. Lorang