2BC1	Corrigé du devoir de mathématiques II,3	11.03.05

Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = [-7,+\infty[\setminus \{2\}$.

(2) $\operatorname{dom}_c f = [-7,+\infty[\setminus \{2\}$ $(= \operatorname{dom} f)$.

(3) $\operatorname{dom}_d f = [-7,+\infty[\setminus \{-1,2,7\}$.

(4) $f_d{}'(-7) = 2$; $f'(-7) = 2$; $f'(-5) = 0$; $f_g{}'(-1) = -4$; $f_d{}'(-1) = 1$; $f'(-1) = /$; $f'(2) = /$; $f_g{}'(7) = \frac{1}{3}$; $f_d{}'(7) = /$; $f'(7) = /$; $f(7) = 2$; $\lim\limits_{x\to 7^+} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$;

(5) $\frac{1}{3} \le \lim\limits_{x\to 2} f'(x) \le 1$.

(6) $S = \{-7\} \cup [-3,2[\cup]2,11]$.

(7) $S = [-7,-5] \cup]-1,2[\cup]2,7[\cup]7,12]$.

(8) Equations des tangentes ou demi-tangentes r, s, t, u, v et w :

$r \equiv y = 2x + 18$ et $x \ge -7$ $\quad$ $u \equiv y = x - 1$ et $x \ge -1$

$s \equiv y = 6$ $\quad$ $v \equiv y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ et $x \le 7$

$t \equiv y = -4x - 6$ et $x \le -1$ $\quad$ $w \equiv x = 7$ et $y \ge 2$

Question 2

(1) Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\sin x \le x \le \tan x$$
$$\Leftrightarrow 0 \le x - \sin x \le \tan x - \sin x \,/ : x^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{x - \sin x}{x^2} \le \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème du sandwich, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0\,.$$

D'autre part, en posant $u = -x$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{x-\sin x}{x^2} &= \lim_{u\to 0^+} \frac{-u-\sin(-u)}{(-u)^2} \\ &= -\lim_{u\to 0^+} \frac{u-\sin u}{u^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration.

(2) a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

b) Sur $\mathbb{R}^*$, f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. f est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. Mais f est aussi continue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

Par conséquent : $\operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}$.

c) Si $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

d) Pour étudier la dérivabilité en 0, on utilise la définition :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0\,,$$

d'après le résultat démontré en (1). Ainsi : $f'(0) = 0$.

e) $\operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}$.

Question 3

(1)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2x+1)\cdot 2\cdot\left(x^2-3x+1\right)-(2x+1)^2(2x-3)}{\left(x^2-3x+1\right)^2} \\ &= \frac{(2x+1)\left(4x^2-12x+4-(2x+1)(2x-3)\right)}{\left(x^2-3x+1\right)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(-8x+7)}{\left(x^2-3x+1\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3\tan^2\left(\sqrt{1-2x^4}\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\sqrt{1-2x^4}\right)\right)\cdot\frac{-8x^3}{2\sqrt{1-2x^4}} \\ &= \frac{-12\tan^2\left(\sqrt{1-2x^4}\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\sqrt{1-2x^4}\right)\right)}{\sqrt{1-2x^4}} \\ &= \frac{-12\sin^2\left(\sqrt{1-2x^4}\right)}{\cos^4\left(\sqrt{1-2x^4}\right)\sqrt{1-2x^4}}\end{aligned}$$