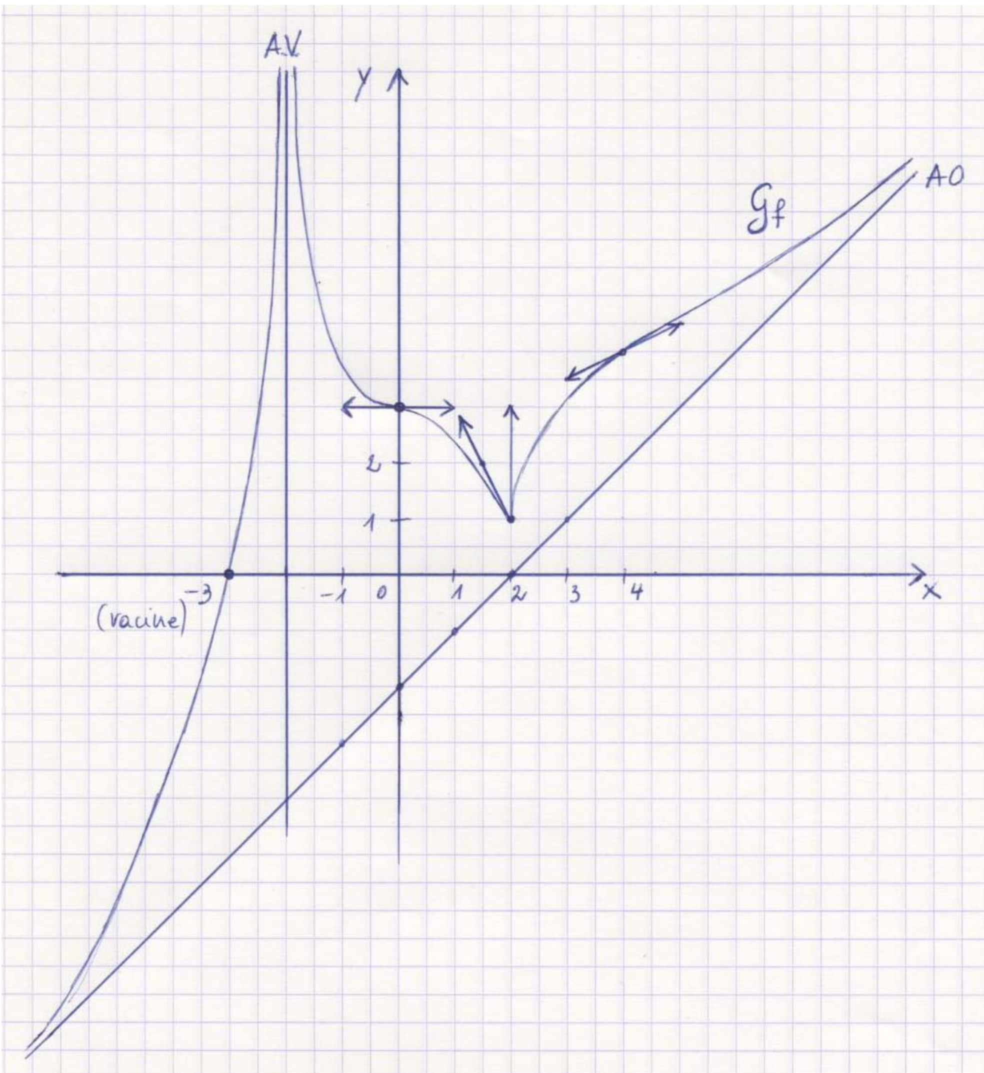
Question 2

x	$-\infty$	-2		0		2		4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$ $+\infty$	//	$-\infty$ $-$	0	$-$ -2	//	$+\infty$ $+$	$\frac{1}{2}$	$+$
$f''(x)$	$+$	//	$+$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	//	$+\infty$ ↘	3	↘	1 **(m)**	↗	4	↗ $+\infty$
$\mathcal{G}_f$	∪	**AV**	∪	**(I)**	∩	*point anguleux*	∩	**(I)**	∪



Question 3

(1) C.E. pour $f(x)$: $x \geq 0$ et $x \neq 1$. Par conséquent :

$$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}.$$

(2) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.V. : } x = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\,(1-\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty,$$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = 0$, mais $\mathcal{G}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\mathcal{G}_f$ admet donc une branche parabolique de direction asymptotique Ox au voisinage de $+\infty$.

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} = -1$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.

On en déduit que $\operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, et

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$$

x	0	1		4	$+\infty$
$f'(x)$	-1 $-$	//	$-$	0	$+$

(4) On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}+1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-2+2(x-2\sqrt{x}+1)}{2x(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x-3\sqrt{x}}{2x(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \frac{-3}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

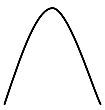
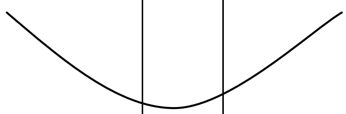
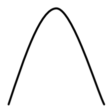
Par conséquent f' n'est pas dérivable en 0, c.-à-d. $f''(0)$ n'existe pas.

Donc : $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et :

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}-2) \cdot 2 \cdot (\sqrt{x}-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2(\sqrt{x}-1)^4}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}$$
$$= \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3}$$

x	0		1		9	$+\infty$
$3-\sqrt{x}$		$+$		$+$	0	$-$
$(\sqrt{x}-1)^3$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	//	$-$	//	$+$	0	$-$

(5)

x	0		1		4		9	$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	//	$-$	0	$+$	$\frac{1}{8}$	$+$
$f''(x)$	//	$-$	//	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	//	$+\infty$ ↘	4 **(m)**	↗	4,5	↗ $+\infty$
$\mathcal{G}_f$			**(AV)**				**(I)**	

(6)