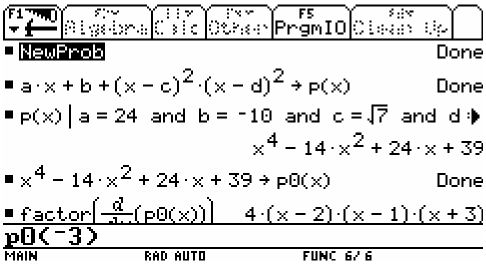
Question 1

$\mathcal{P} : y = ax + b + (x - c)^2 (x - d)^2$

$\mathcal{D} : y = ax + b$

Partie A : $a = 24,\ b = -10,\ c = \sqrt{7}$ et $d = -\sqrt{7}$.



(1) A l'aide de la V200 on obtient successivement :

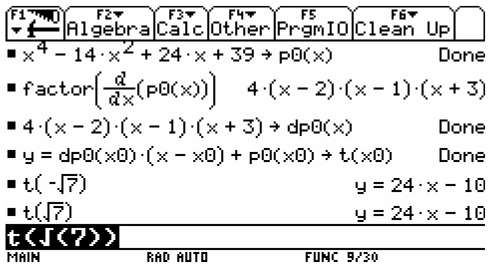
$$p(x) = 24x - 10 + \left(x - \sqrt{7}\right)^2 \left(x + \sqrt{7}\right)^2$$
$$= x^4 - 14x^2 + 24x + 39$$

et :

$$p'(x) = 4(x-2)(x-1)(x+3)$$

Les racines de p' sont donc 2, 1 et -3. Etant donné que les racines sont toutes simples, p' change de signe en chacune d'elles et donc p admet des extréma aux points d'abscisses 2, 1 et -3 respectivement. De ces considérations on déduit immédiatement le tableau de variations de p :

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$p'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$	$+\infty$ ↘	-78 (m)	↗	50 (M)	↘	47 (m)	↗ $+\infty$



(2) Soit t_{x_0} la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse x_0 :

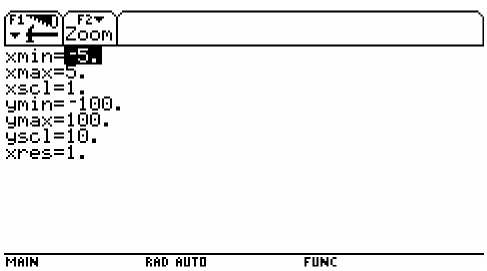
$$t_{x_0} : y = p'(x_0)(x - x_0) + p(x_0)$$

La V200 donne immédiatement :

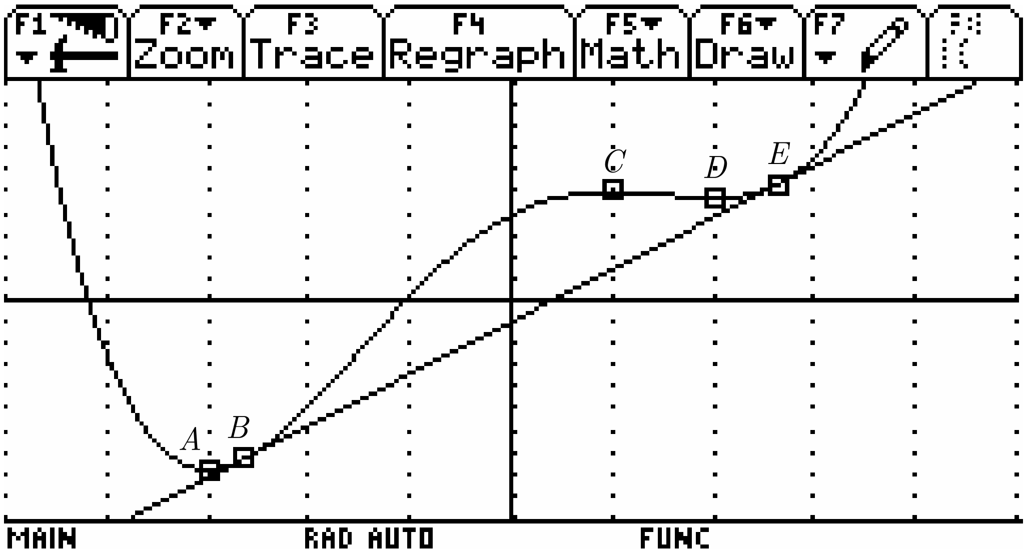
$$t_{-\sqrt{7}} : y = 24x - 10 \text{ et } t_{\sqrt{7}} : y = 24x - 10$$

En d'autres termes, la droite $\mathcal{D}$ est en même temps la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $-\sqrt{7}$ et au point d'abscisse $\sqrt{7}$.

(3) On prend les paramètres suivantes pour la fenêtre graphique :



On obtient le graphique suivant avec la TI, sur lequel nous mettons en évidence les points remarquables des courbes :



A, C et D sont les extréma de $\mathcal{P}$ (tangente horizontale !)

B et E sont les points de contact de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{P}$ d'abscisses $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$ resp.

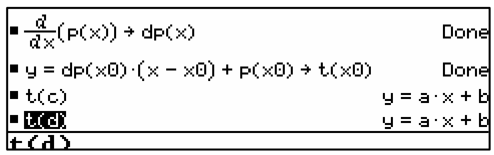
Partie B :

(1) On note à nouveau t_{x_0} la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse x_0 :

$$t_{x_0} : y = p'(x_0)(x - x_0) + p(x_0)$$

La V200 donne immédiatement : $t_c : y = ax + b$ et $t_d : y = ax + b$.

En d'autres termes, la droite $\mathcal{D}$ est toujours une tangente commune à $\mathcal{P}$ aux points d'abscisses c et d respectivement.



(2) On a :

$$\begin{aligned} p(x) - y_{\mathcal{D}} &= \left[ax + b + (x-c)^2(x-d)^2\right] - (ax + b) \\ &= (x-c)^2(x-d)^2 \end{aligned}$$

Cette expression est toujours positive et s'annule en $x = c$ ou $x = d$. En d'autres termes, $\mathcal{P}$ est toujours située au-dessus de $\mathcal{D}$ et rencontre $\mathcal{D}$ uniquement aux points d'abscisses c et d. (Cela redémontre le fait que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{P}$ aux points d'abscisses c et d.)

(3) La dérivée seconde de p est un trinôme du second degré :

$$p''(x) = 12x^2 - 12(c+d)x + 2\left(c^2 + 4cd + d^2\right).$$

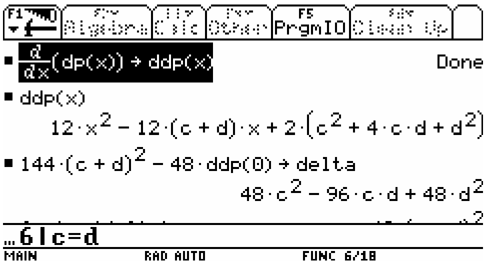
Le nombre de racines dépend de son discriminant :

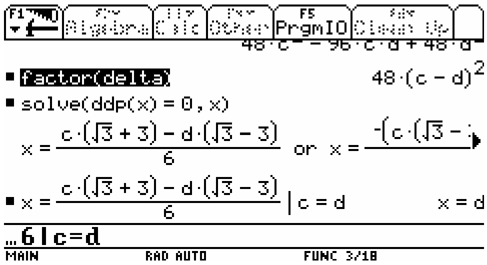
$$\Delta = 48\left(c^2 - 2cd + d^2\right) = 48(c-d)^2$$

- Lorsque $c \neq d$ on a $\Delta > 0$ et p'' admet deux racines simples. Dans ce cas il y a donc exactement deux points d'inflexion aux points d'abscisses respectives

$$x_1 = \frac{c\left(\sqrt{3}+3\right)-d\left(\sqrt{3}-3\right)}{6} \text{ et } x_2 = \frac{d\left(\sqrt{3}+3\right)-c\left(\sqrt{3}-3\right)}{6}$$

- Lorsque $c = d$ on a $\Delta = 0$ et p'' admet une racine double, à savoir $x = d$. Dans ce cas il n'y a pas de point d'inflexion car p'' ne change pas de signe en $x = d$.





Question 2

$f : x \mapsto \cos(2x) + 2\sin x$ et on note $\mathcal{G}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}$, car f est une somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

(2) f est périodique de période 2π. En effet :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+2\pi) &= \cos(2x+4\pi) + 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x) + 2\sin x \\ &= f(x)\end{aligned}$$

(3) $\mathcal{G}$ admet l'axe de symétrie $x = \frac{\pi}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) &= \cos(\pi+2x) + 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+x\right) \\ &= -\cos(2x) + 2\cos x \\ f\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(\pi-2x) + 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) \\ &= -\cos(2x) + 2\cos x\end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

(4) Comme f est périodique de période 2π, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Cet intervalle admet comme milieu $\frac{\pi}{2}$. Comme $\mathcal{G}$ admet l'axe de symétrie $x = \frac{\pi}{2}$, il suffit d'étudier f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(5) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin(2x) = 2\cos x - 4\sin x\cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$.

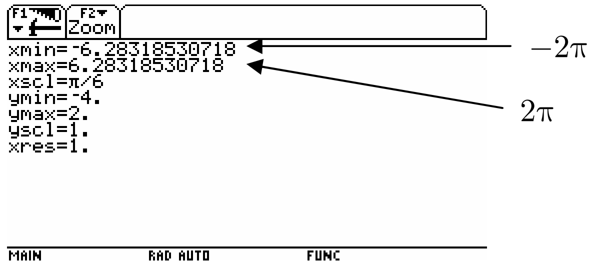
(6) Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a :

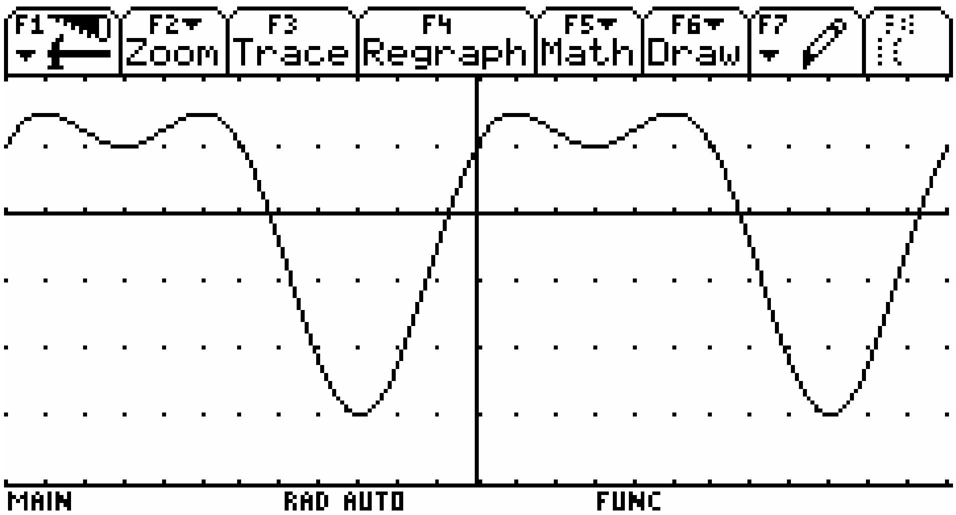
$$\begin{aligned}f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \pm\tfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \tfrac{\pi}{6}\end{aligned}.$$

(7)

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	−3 (m)	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$ (M)	$\searrow$	1 (m)

(8) On prend les paramètres suivants pour la fenêtre graphique :





G. Lorang