Nom : .... Prénom : ....

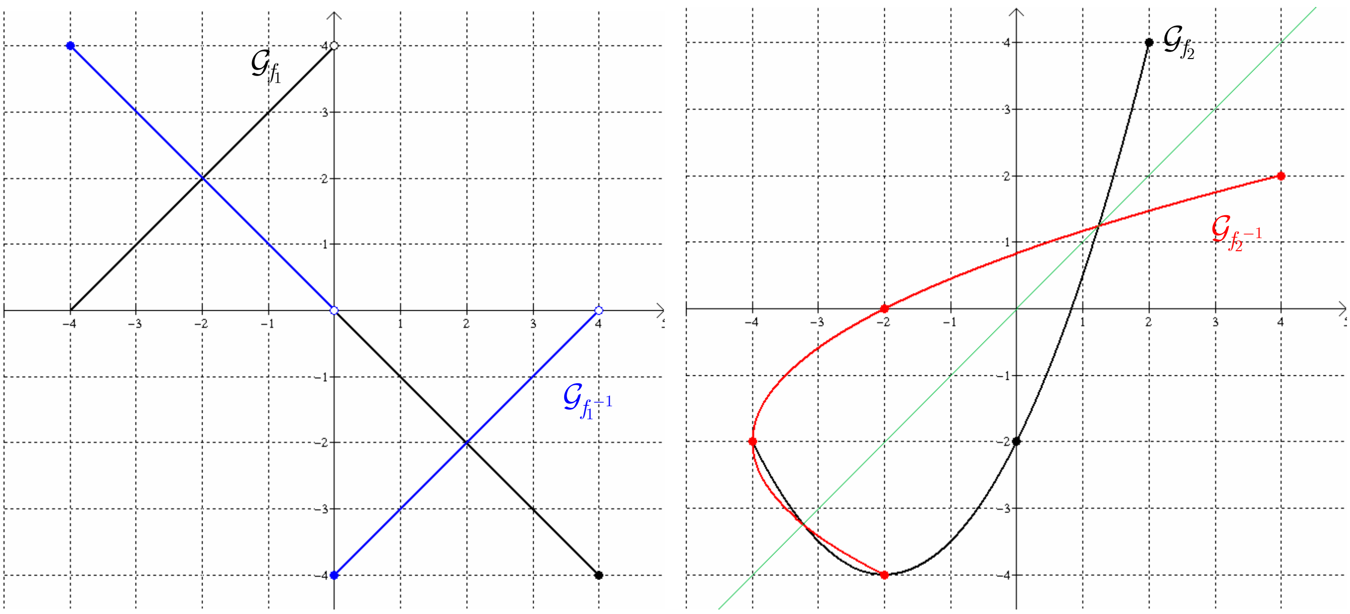
2BC1 Corrigé du devoir de mathématiques III,3 21.06.05

Question 1

(1)

	$i=1$	$i=2$
dom f_i = ...	$[-4,4]\setminus\{0\}$	$[-4,2]$
im f_i = ...	$[-4,4[$	$[-4,4]$
f_i est injective (V ou F)	V	F
f_i est surjective (V ou F)	F	V
f_i est une application (V ou F)	F	F
f_i est une bijection (V ou F)	F	F
f_i^{-1} est une fonction (V ou F)	V	F

(2)



(3) Par manipulations du graphe de $x \mapsto x^2$:

$x \mapsto x^2$

diviser les ordonnées par 2

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

soustraire 2 aux abscisses

$x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)^2$

soustraire 4 aux ordonnées

$x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4$

D'où l'équation de $\mathcal{G}_{f_2}$: $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4,$ avec $-4 \leq x \leq 2$.

(4) Il est clair que $f_2 : [-2,2] \to [-4,4]$ est une ***bijection***, car elle est ***continue***, ***strictement croissante*** sur $[-2,2]$, $f_2(-2) = -4$ et $f_2(2) = 4$. Pour déterminer sa bijection réciproque, on résout :

$$(\forall x \in [-2,2]),(\forall y \in [-4,4]) \qquad \begin{aligned} & f_2(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}(x+2)^2 - 4 = y \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)^2 = \underbrace{2y+8}_{\geq 0 \text{ car } y \geq -4} \\ \Leftrightarrow\ & x + 2 = \sqrt{2y+8} \quad (\text{car } x+2 \geq 0) \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt{2y+8} - 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : [-4,4] &\to [-2,2] \\ x &\mapsto \sqrt{2x+8} - 2 \end{aligned}$$

Question 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

(1) a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}$

b) $\operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom} f$. ($f$ est continue sur son domaine car c'est un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur s'annule uniquement en 2 et –2.)

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, donc $AH : y = 1$,

$\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \dfrac{-3}{0^{\pm} \cdot 4} = \mp\infty$, donc $AV : x = 2$,

$\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \dfrac{5}{-4 \cdot 0^{\pm}} = \mp\infty$, donc $AV : x = -2$.

d) Avec la TI V200 on trouve :

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 - x + 4\right)}{(x-2)^2 (x+2)^2}, \ x \neq \pm 2$$

On a : $f'(x) > 0$ pour $x \neq \pm 2$, car le discriminant de $x^2 - x + 4$ est $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$.

e) D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	//	$-\infty \nearrow +\infty$	//	$-\infty \nearrow 1$

(2) On déduit du tableau de variations (ou du graphe ci-dessous, que l'élève peut réaliser avec la TI V200) que :

- si $y > 1$, alors y a 2 antécédents, l'un < -2, l'autre dans $]-2,2[$,
- si $y < 1$, alors y a aussi 2 antécédents, l'un > 2, l'autre dans $]-2,2[$,
- si $y = 1$, alors y a exactement 1 antécédent dans $]-2,2[$.

Il y a donc deux cas à considérer pour résoudre $f(x) = y$: $y \neq 1$ et $y = 1$.

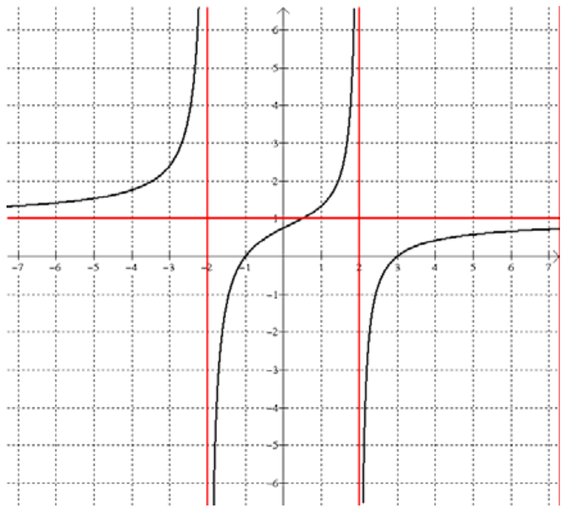
1^er^ cas $y \neq 1$. Alors l'équation

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ & (\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = y(x-2)(x+2) \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = yx^2 - 4y \\ & \Leftrightarrow (1-y)x^2 - 2x + (4y-3) = 0) \end{aligned}$$

est du 2^nd^ degré et admet les 2 solutions distinctes (avec la TI V200) :

$$x_1 = \frac{-\left(\sqrt{4y^2 - 7y + 4} + 1\right)}{y-1} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{4y^2 - 7y + 4} - 1}{y-1}.$$

Remarque : On a toujours $|x_1| > |x_2|$, puisque $\sqrt{4y^2 - 7y + 4} + 1 > \sqrt{4y^2 - 7y + 4} - 1$. Par conséquent, c'est la solution x_2 qui appartient à $]-2,2[$, quel que soit $y \in \mathbb{R}$.



2^e^ cas $y = 1$. Alors l'équation

$$f(x) = y \Leftrightarrow -2x + 1 = 0$$

est du 1^er^ degré et admet la solution unique $x = \frac{1}{2}$ (TI V200).

(3) f est

- ***continue*** sur $]-2,2[$,
- ***strictement croissante*** sur $]-2,2[$,
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Donc f est une bijection de $]-2,2[$ sur $\mathbb{R}$. D'après la remarque suivant le 1^er^ cas dans la question (2), sa réciproque f^{-1} (abus de notation) est :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]-2,2[$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$