Question 1

(1) C.E. : $x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -3$.

$\mathrm{dom}_f = \mathrm{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$.

(2) a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 + x - 6}$ $\left(\text{f.i. } \dfrac{0}{0}\right)$

On factorise le numérateur, qui est divisible par $x-2$. Le schéma de Horner donne : $x^3 - x - 6 = (x-2)\left(x^2+2x+3\right)$. Donc :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+3\right)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+3}{x+3} = \frac{11}{5}$$

Donc :

$(\forall x \in \mathrm{dom}\, f) \quad f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+3}$

I.G. : $\mathcal{G}_f$ admet un trou en $\left(2, \frac{11}{5}\right)$. f est discontinue en 2.

b) $$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \lim_{x\to -3^\pm} \frac{x^2+2x+3}{x+3} = \frac{6}{0^\pm} = \pm\infty$$

On fait un tableau du signe de $x+3$!

I.G. : $\mathcal{G}_f$ admet l'A.V. : $x = -3$

c) $$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x+3}{x+3} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} x = \pm\infty$$

I.G. : $\mathcal{G}_f$ n'admet pas d'A.H.

Pour déterminer l'A.O. éventuelle, on transforme $f(x)$ grâce à la division euclidienne de x^2+2x+3 par $x+3$. Le schéma de Horner donne :

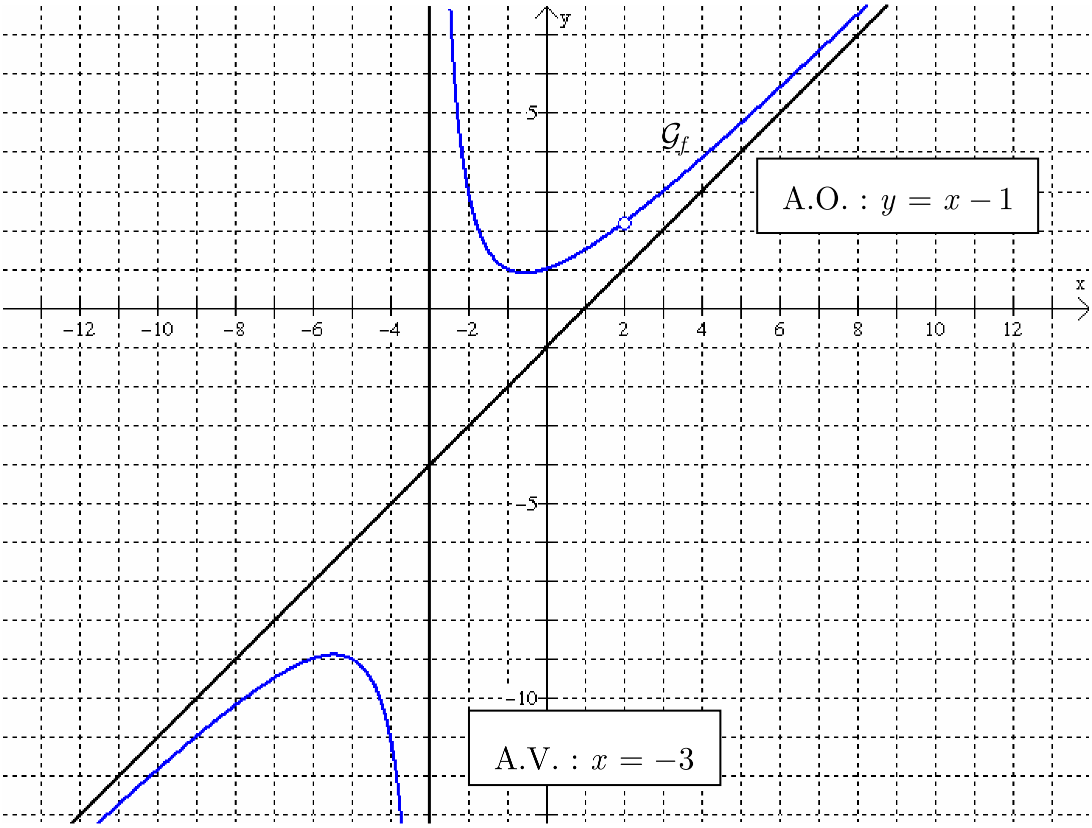
$$f(x) = x - 1 + \frac{6}{x+3}$$

Donc :

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left[f(x) - (x-1)\right] = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{6}{x+3} = 0^\pm$$

I.G. : $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O. $y = x - 1$.

(3) Voici le graphe complet de la fonction :



Question 2

(1) Les conditions d'existence sont :

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ 4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \\ x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

Donc : $\operatorname{dom} g = [-\frac{1}{2}, 4] \setminus \{1\}$.

(2) a) $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{4-x}}{|x-1|} = \frac{-\sqrt{\frac{9}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\sqrt{2} = g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

I.G. g est continue (à droite) en $-\frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{4-x}}{|x-1|} = \frac{3}{3} = 1 = g(4)$.

I.G. g est continue (à gauche) en 4.

c) $$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{4-x}}{|x-1|}$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{4-x}\right)}{|x-1|\underbrace{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{4-x}\right)}_{\to 2\sqrt{3}}}$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{2x+1-4+x}{|x-1|\cdot 2\sqrt{3}}$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{|x-1|\cdot 2\sqrt{3}}$$

On simplifie la valeur absolue (tableau !) :

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{x\to1^{\pm}} g(x) = \lim_{x\to1^{\pm}}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\pm\cancel{(x-1)}\cdot 2\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

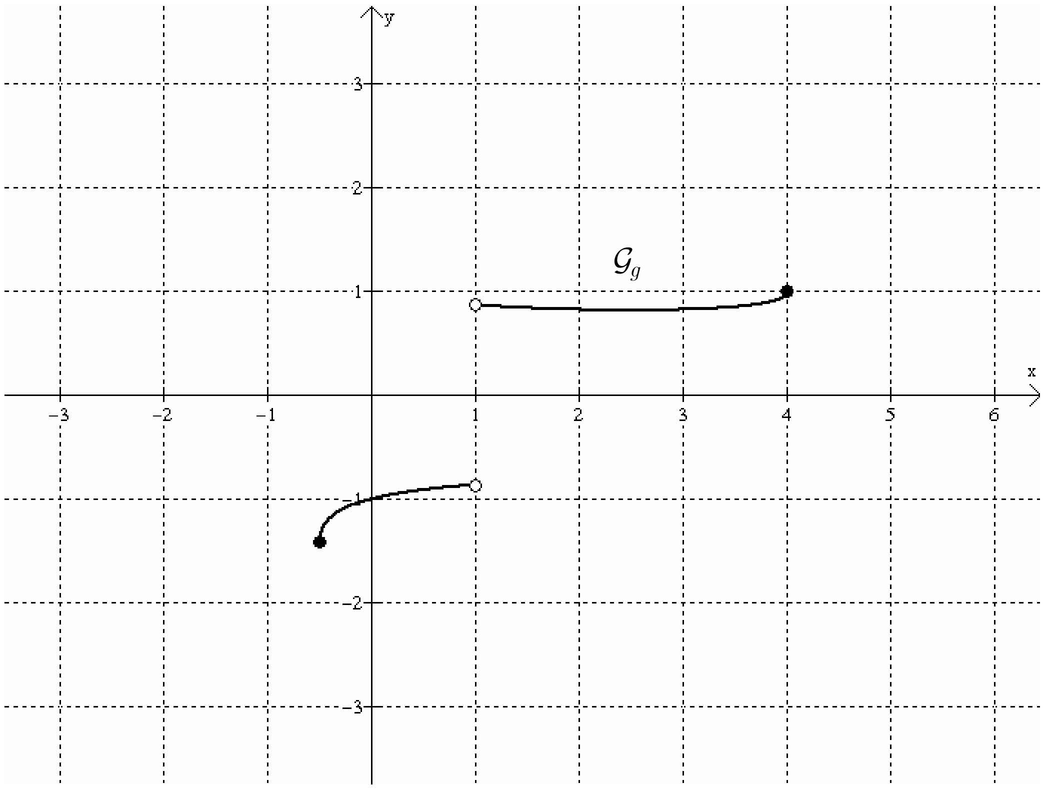
I.G. : $\mathcal{G}_g$ admet un saut d'amplitude $\sqrt{3}$ à l'abscisse 1. g est discontinue en 1.

Donc :

$$\mathrm{dom}_c\, g = \mathrm{dom}\, g = \left[-\tfrac{1}{2}, 4\right] \setminus \{1\}.$$

$\mathcal{G}_g$ n'admet pas d'asymptotes.

(3) Voici le graphe complet de la fonction :



Question 3

(1) C.E. : $\begin{cases} 4 - x^2 \neq 0 \text{ et } x > -2 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ x \neq 0 \text{ et } x \leq -2 \quad \text{impossible !} \end{cases}$

$\operatorname{dom} h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(2) On commence par faire un tableau pour simplifier $\left|4 - x^2\right|$:

x	-2		2	$+\infty$
$\left\|4 - x^2\right\|$	0	$4 - x^2$	0	$x^2 - 4$

$$\bullet \lim_{x \to -2^+} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{3x+6}{4-x^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{3\cancel{(x+2)}}{(2-x)\cancel{(2+x)}} = \frac{3}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{2} - \frac{7}{2x} = \frac{3}{4} = h(-2)$$

Donc : $\lim\limits_{x \to -2} h(x) = h(-2)$, c.-à-d. h est continue en -2.

Par conséquent : $\operatorname{dom}_c h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(3) En $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+6}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0^+$$

I.G. : A.H.D : $y = 0$.

En $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty - \frac{7}{2 \cdot (-\infty)} = -\infty \text{ donc pas d'A.H.G.}$$

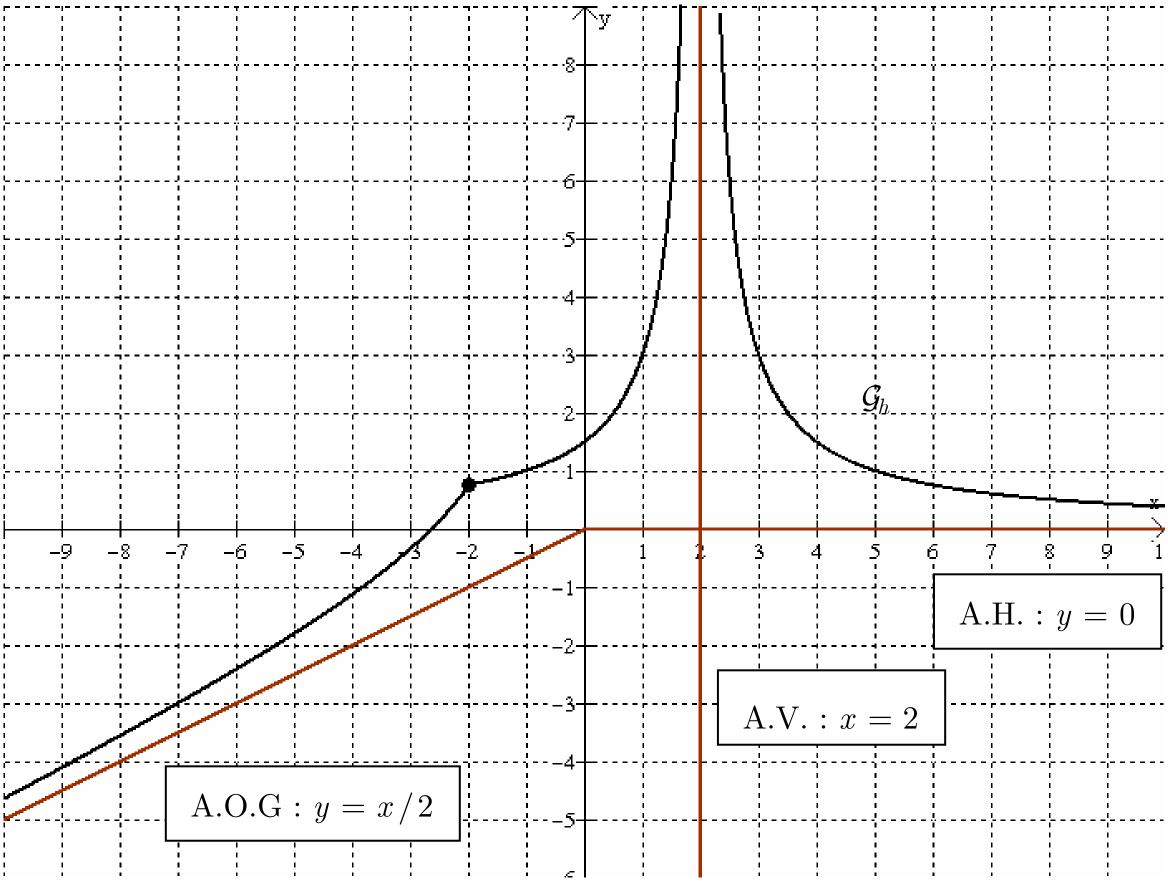
$$\lim_{x \to -\infty} \left[h(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{7}{2x} = 0^+$$

I.G. : A.O.G : $y = \frac{x}{2}$.

(4) $\mathcal{G}_h$ admet encore l'asymptote verticale : $x = 2$ car :

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x+6}{\left|4 - x^2\right|} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

Pour illustrer l'étude, voici le graphe complet de la fonction :



G. Lorang