Question 1

(1) Voir manuel.

(2) Voir manuel.

(3) Voir cahier : $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

On en déduit que $\operatorname{dom} f' \cap \operatorname{dom} g' \subset \operatorname{dom}(f \cdot g)'$. Il n'y a pas nécessairement égalité, comme le prouve le contre-exemple simple que voici :

$f(x) = g(x) = \sqrt{x}$,

$\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} g' = \operatorname{dom} f' \cap \operatorname{dom} g' = \mathbb{R}_+^*$,

$(fg)(x) = \sqrt{x}^2 = x$, $\operatorname{dom}(fg) = \mathbb{R}_+$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+)(fg)'(x) = 1$, donc :

$\operatorname{dom}(fg)' = \mathbb{R}_+ \neq \operatorname{dom} f' \cap \operatorname{dom} g'$

(4) Voir cahier.

Question 2

(1) $\operatorname{dom} f = [-4,3[$, $\operatorname{dom}_c f = [-4,3[\setminus \{1\}$, $\operatorname{dom}_d f = [-4,3[\setminus \{-2,0,1\}$

(2)

x	-4	-3	-2	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	0	2	1	2	/
$f'(x)$	4	0	/	/	/	2	/
$f_g'(x)$	/	0	/	$\frac{1}{2}$	/	2	/
$f_d'(x)$	4	0	/	–3	0	2	/

(3) $(-2,0)$ est un point de rebroussement, (0,2) est un point anguleux.

(4) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty$.

Question 3

(1) C.E. : $x^2 + 3x + 2 \geq 0$, $\operatorname{dom} f =]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[$.

(2) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = -2$, f est continue (à gauche) en –2.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = -1$, f est continue (à gauche) en –2.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, pas d'A.H.D.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}+x}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}{\cancel{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1 \\
&= 2 \ (= a)
\end{aligned}$$

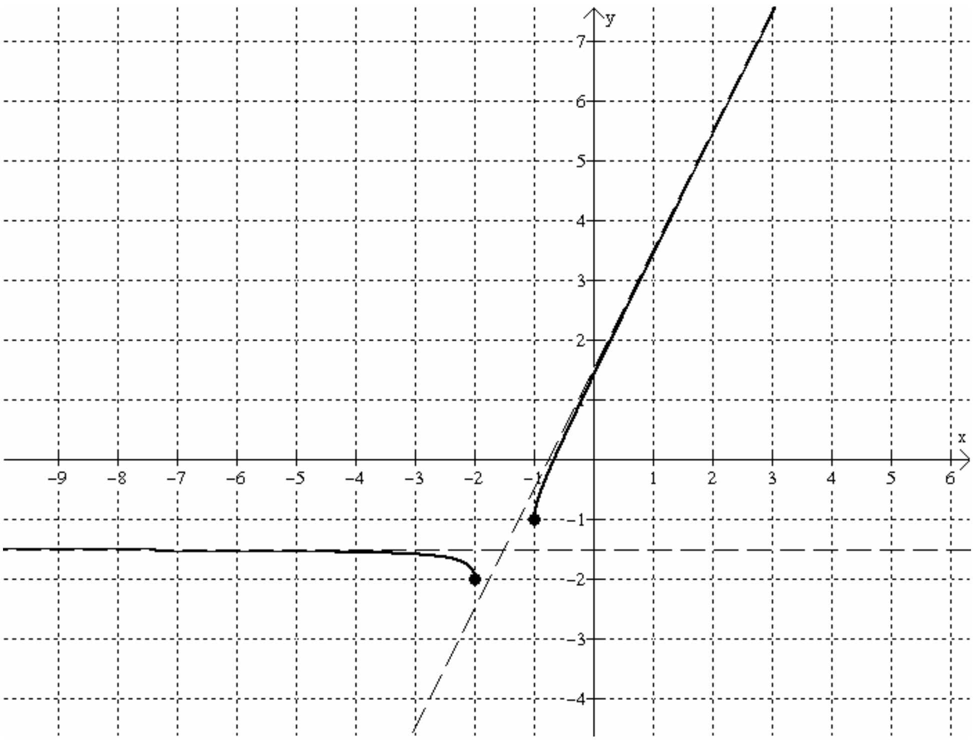
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}-x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} \\
&= \frac{3}{2} \ (= b)
\end{aligned}$$

Donc A.O.D. : $y = 2x + \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x \quad (\text{f.i.} : \infty-\infty) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Donc A.H.G. : $y = -\frac{3}{2}$.

(3) Voici le graphe de f avec ses asymptotes :



Question 4

(1) $g(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}}{3} - 2\sqrt{x}\,,\ \operatorname{dom} g = \mathbb{R}_+$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5}{6}x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\operatorname{dom} g' = \mathbb{R}_+^*$

(2) $h(x) = \dfrac{4-x^2}{\sqrt[3]{x}} + 1,\ \operatorname{dom} h = \mathbb{R}^*$

$$h'(x) = \left(4x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{5}{3}} + 1\right)'$$

$$= -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + 0$$

$$= -\frac{4}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

$\operatorname{dom} h' = \mathbb{R}^*$

G. Lorang