Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}2\}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -1^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^\pm} \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{-1}{0^\pm(-3)} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. $x = 1$;

$\lim\limits_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{8}{3\cdot 0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. $x = 2$;

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}}_{\varepsilon(x)} = 0^\pm \Rightarrow \text{A.O. : } y = x+1$$

(3) Le signe de $\varepsilon(x)$ donne la position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à l'A.O :

x	$-\infty$	-1		$-\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
$3x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\varepsilon(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
Position :	A.O./$\mathcal{G}_f$	‖	$\mathcal{G}_f$ / A.O.	Pt. d'inters.	A.O./$\mathcal{G}_f$	‖	$\mathcal{G}_f$ / A.O.

(4) $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}2\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+1)(x-2) - x^3(x-2+x+1)}{(x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2[3(x+1)(x-2) - x(2x-1)]}{(x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2\left[3\left(x^2-x-2\right) - x(2x-1)\right]}{(x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2\left(x^2-2x-6\right)}{(x+1)^2(x-2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = x_1 = 1 - \sqrt{7} \simeq -1{,}65$ ou $x = x_2 = 1 + \sqrt{7} \simeq 3{,}65$

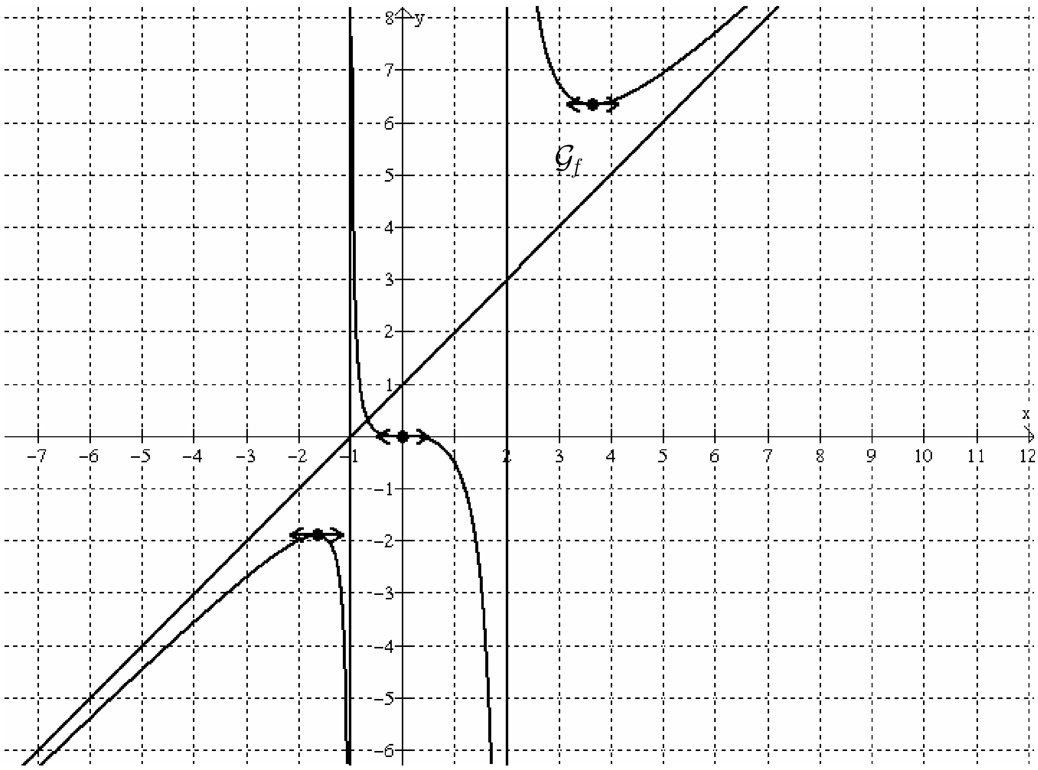
Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 2x - 6$, les autres facteurs étant toujours ≥ 0.

T.V. :

x	$-\infty$	x_1		-1		0		2		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1,89 (M)	↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	6,34 (m)	↗ $+\infty$

Le point (0,0) est un point d'inflexion à tangente horizontale.

(5) Représentation graphique :



Question 2

(1) $\operatorname{dom} g = \operatorname{dom}_c g = \mathbb{R}_+$

(2) Racines :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x} \quad \text{(les 2 membres sont } \geq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$, donc g est continue en 0.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = +\infty \cdot +\infty = +\infty \Rightarrow \text{ pas d'A.H.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \ \ (= a\,)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{x} = -\infty \Rightarrow \text{pas d'A.O.}$$

(4) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ g'(x) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$\cancel{g'(0)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = -\infty$

Donc g n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{G}_g$ admet une demi-tangente verticale en (0,0).

Finalement : $\operatorname{dom} g' = \mathbb{R}_+^*$.

(5) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$g'(x)$ a le signe de $\sqrt{x} - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0 (M)	$\searrow$	-1 (m)	$\nearrow$	$+\infty$

(6)

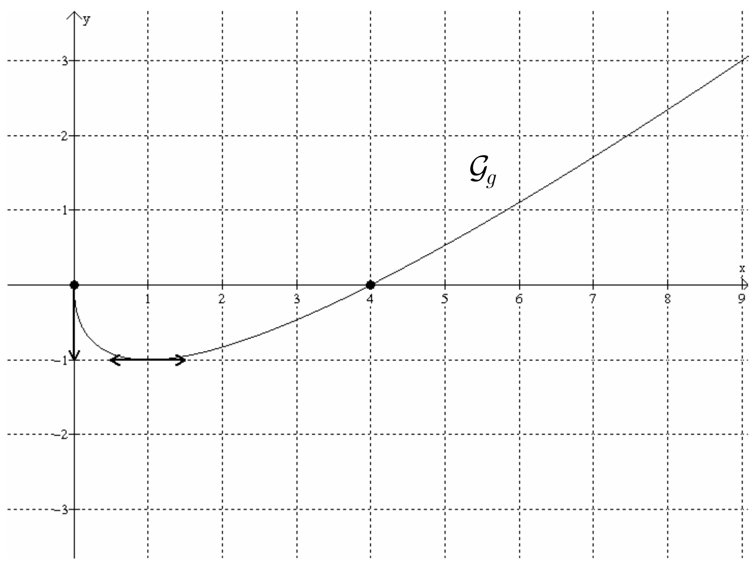
m	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
nbre d'antécédents de m	0	1	2	2	1

(7) $\operatorname{dom} g'' = \mathbb{R}_+^*$

$g''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

On voit que $g''(x) > 0$ sur son domaine, donc la concavité de $\mathcal{G}_g$ est tournée vers le haut. $\mathcal{G}_g$ n'a pas de point d'inflexion.

(8) Représentation graphique :



G. Lorang