2B | Devoir de mathématiques | 26.05.08

Partie sans V200 (40')

Question 1 — 30 (=3+4+7+5+5+1+5) points

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{1 - 2\cos^2 x}.$$

(1) Déterminer les domaines d'existence et de continuité de f.

(2) Etudier la périodicité et la parité de f. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

(3) Etudier les limites de f aux bornes de $[0,\pi] \cap \operatorname{dom} f$ et en déduire l'existence de deux asymptotes à $\mathcal{G}_f$ sur $[0,\pi]$.

(4) Quel est le domaine de dérivabilité de f ? Justifier brièvement votre réponse, puis calculer et factoriser $f'(x)$. On trouvera :

$$f'(x) = -\frac{\cos x\left(1 + 2\sin^2 x\right)}{\left(1 - 2\cos^2 x\right)^2}.$$

(5) Etudier le sens de variation de f sur $[0,\pi]$ (sans la concavité).

(6) Etablir l'équation de la tangente t à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse 0.

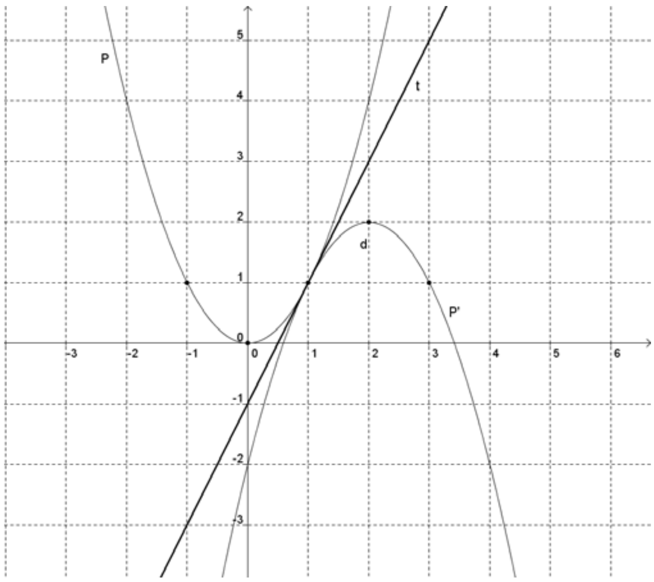
(7) Représenter graphiquement f sur $\left[-\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Partie avec V200 (60’)

Question 2 30 (=4+8+18) points

Définition. f et g étant deux fonctions ***dérivables***, on dit que leurs graphes $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$ sont ***tangents*** si les deux graphes passent par un même point et si, en ce point, la tangente à $\mathcal{G}_f$ et la tangente à $\mathcal{G}_g$ sont confondues.

(1) Voici deux paraboles tangentes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:



Déterminer une équation cartésienne des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, puis montrer qu’elles sont tangentes au point d’abscisse 1.

(2) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d’équation $y = x^2$. Déterminer une parabole $\mathcal{Q}$ d’axe vertical, de sommet le point $(2,1)$ et tangente à $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées du point de tangence C ainsi que l’équation de la tangente commune t en C. Esquisser rapidement $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et t.

(3) ***Généralisation de la question précédente***. On note toujours $\mathcal{P}$ la parabole d’équation $y = x^2$. Etant donné un point quelconque $S(r,s)$ du plan, sous quelle(s) condition(s) existe-t-il une parabole d’axe vertical, de sommet S et tangente à $\mathcal{P}$? Cette parabole est-elle toujours unique ? Déterminer les coordonnées du point de tangence ainsi que l’équation de la tangente commune.

Indication. On discutera ***en fonction des paramètres*** r et s. Outre le cas général, la réponse comportera une étude des cas particuliers suivants :

- $s = r^2$;
- $s = 0$;
- $r = 0$.

G. Lorang