Question 1 — 30 (=3+4+7+5+5+1+5) points

(1) C.E. : $1-2\cos^2 x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x \neq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Donc : $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(2) $f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{1-2\cos^2(x+2\pi)} = \dfrac{\sin x}{1-2\cos^2 x} = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$.

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{1-2\cos^2(-x)} = \dfrac{-\sin x}{1-2\cos^2 x} = -f(x)$

Donc f est impaire. Il suffit donc d'étudier f sur $[0,\pi]$. $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à O. Il suffit donc d'étudier f sur $[0,\pi]$.

(3) f est continue en 0 et en π. Donc :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = 0$.

Pour étudier les limites en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, on étudie d'abord le signe de

$$1-2\cos^2 x = \left(1-\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
$1-\sqrt{2}\cos x$	$-$	0	$+$		$+$
$1+\sqrt{2}\cos x$	$+$		$+$	0	$-$
$1-2\cos^2 x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \dfrac{\sin x}{1-2\cos^2 x} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \dfrac{\sin x}{1-2\cos^2 x} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.V. : } x=\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-} \dfrac{\sin x}{1-2\cos^2 x} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^+} \dfrac{\sin x}{1-2\cos^2 x} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A.V. : } x=\frac{3\pi}{4}$$

(4) f est un quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur son domaine d'existence. Donc : $\operatorname{dom}_d f = \operatorname{dom} f$.

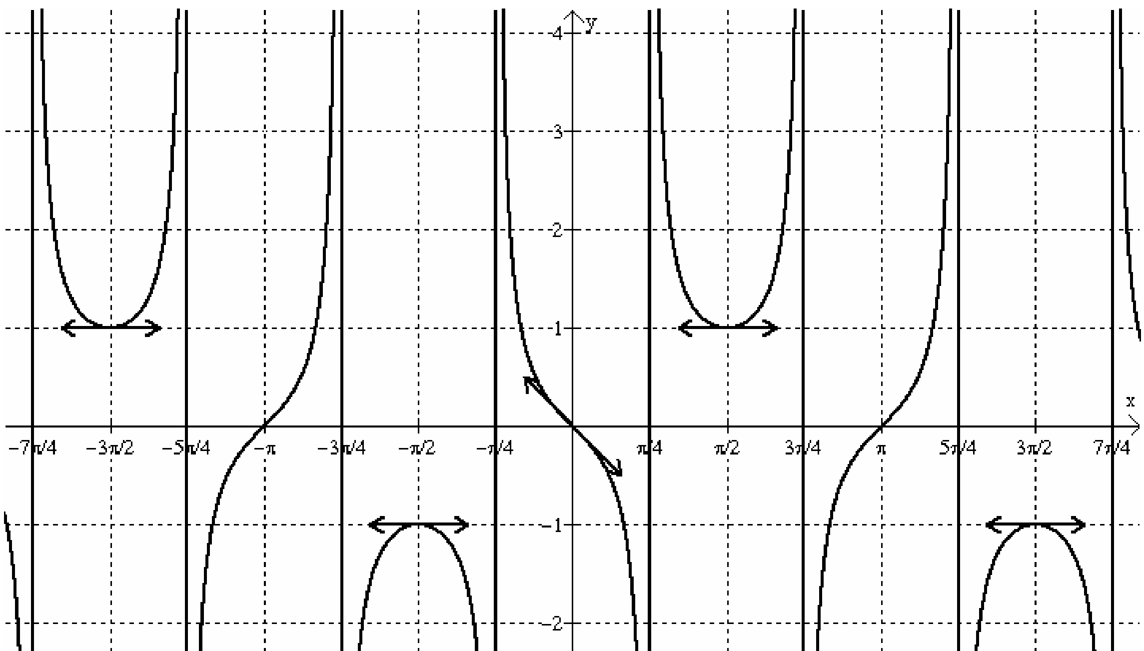
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x\left(1-2\cos^2 x\right)-\sin x\left(-4\cos x\cdot(-\sin x)\right)}{\left(1-2\cos^2 x\right)^2}\\
&= \frac{\cos x\left[\left(1-2\cos^2 x\right)-4\sin^2 x\right]}{\left(1-2\cos^2 x\right)^2}\\
&= \frac{\cos x\left[1-2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-2\sin^2 x\right]}{\left(1-2\cos^2 x\right)^2}\\
&= \frac{\cos x\left(-1-2\sin^2 x\right)}{\left(1-2\cos^2 x\right)^2}\\
&= -\frac{\cos x\left(1+2\sin^2 x\right)}{\left(1-2\cos^2 x\right)^2}
\end{aligned}
$$

(5) $f'(x)$ a le signe de $-\cos x$. Sur $[0,\pi]$, f' a donc une racine unique, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	$-$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$+$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$\vert\vert$	$+\infty \searrow$	1 (m)	$\nearrow +\infty$	$\vert\vert$	$-\infty \nearrow 0$

(6) $f(0)=0$ et $f'(0)=-1$, donc $t : y=-x$.

(7) Représentation graphique sur $\left[-\frac{7\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$:



Partie avec V200

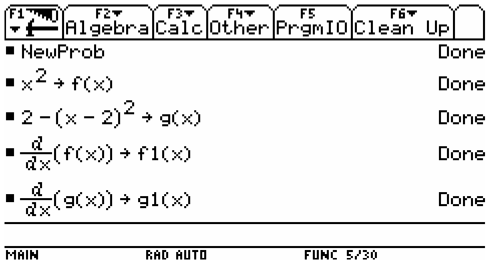
Question 2

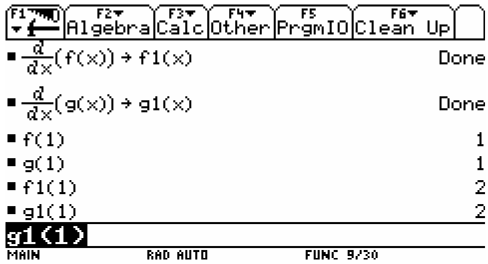
(1) $\mathcal{P}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et

$\mathcal{P}'$ est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 2-(x-2)^2$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont tangentes au point d'abscisse 1 car :

$$f(1) = g(1) = 1 \text{ et } f'(1) = g'(1) = 2$$





(2) Soit $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ la fonction dont le graphe est la parabole cherchée $\mathcal{Q}$.

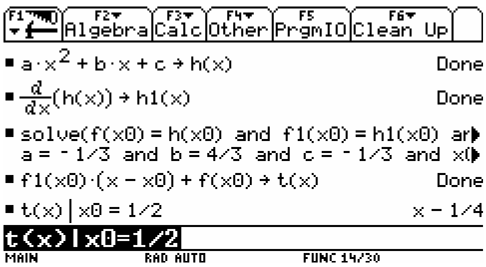
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont tangentes au point d'abscisse x_0 (inconnue)

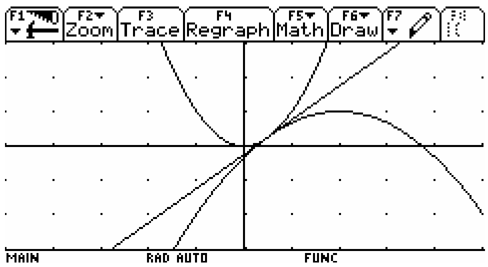
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = h(x_0) \\ f'(x_0) = h'(x_0) \\ h(2) = 1 \\ h'(2) = 0 \end{cases}$$

Les 2 dernières équations traduisent le fait que $\mathcal{Q}$ admet comme sommet $(2,1)$.

On résout le système par rapport aux quatre inconnues a, b, c et x_0 avec la V200 et on trouve :

$$a = -\tfrac{1}{3},\ b = \tfrac{4}{3},\ c = -\tfrac{1}{3} \text{ et } x_0 = \tfrac{1}{2}.$$





Donc : $\mathcal{Q} : y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

Le point de tangence est donc : $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

La tangente commune aux deux paraboles en ce point est :

$$t : y = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = x - \tfrac{1}{4}$$

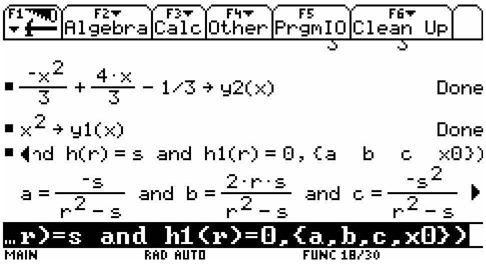
Une esquisse faite avec la V200 se trouve ci-dessus.

(3) Soit toujours $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ la fonction dont le graphe est la parabole cherchée $\mathcal{Q}$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont tangentes au point d'abscisse x_0 (inconnue)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = h(x_0) \\ f'(x_0) = h'(x_0) \\ h(r) = s \\ h'(r) = 0 \end{cases}$$

La V200 sait résoudre ce système en fonction de s et de r.

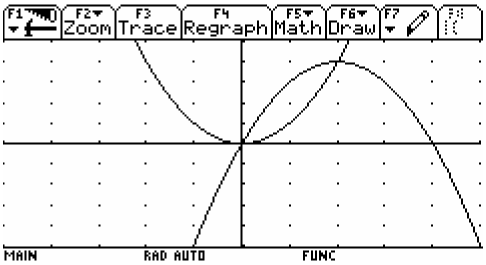
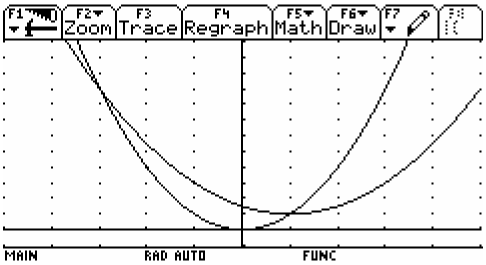


Elle donne :

$$a = \frac{-s}{r^2 - s},\ b = \frac{2rs}{r^2 - s},\ c = \frac{-s^2}{r^2 - s} \text{ et } x_0 = \frac{s}{r}. \qquad (*)$$

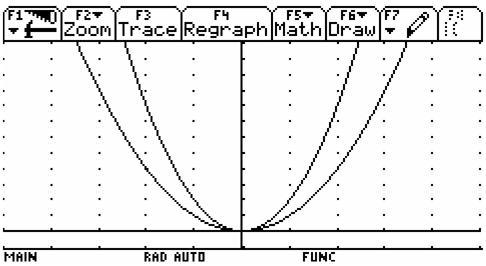
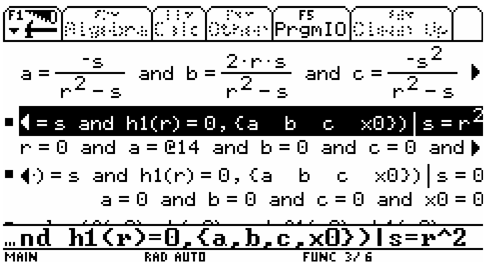
Pour la V200, le problème admet donc toujours une solution unique ! Or, bien sûr, les dénominateurs dans les expressions doivent être non nuls. Donc :

<u>1^{er} cas particulier</u> : $r^2 = s$. Alors le sommet S de $\mathcal{Q}$ est situé sur la parabole $\mathcal{P}$ et donc $h'(x_0) = 0$.

Dans ce cas $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne seront en général pas tangentes sauf dans deux situations exceptionnelles, détectées par la V200 :

a) $\boxed{r = b = c = x_0 = 0 \text{ et } a \text{ quelconque.}}$ C'est le cas où le sommet S coïncide avec le sommet O de la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$. Alors $\mathcal{P}$ et Q sont évidemment tangentes en O, la tangente commune est Oy mais $\mathcal{Q}$ ***n'est pas unique*** puisque a peut être quelconque ($a \neq 0$).

b) $\boxed{r = b = c = 0,\ \ a = 1 \text{ et } x_0 \text{ quelconque.}}$ C'est le cas où $\mathcal{P} = Q$. Dans ce cas, en appliquant de façon stricte la définition, $\mathcal{P}$ et Q sont tangentes en tout point.

2^e^ cas particulier : $s = 0$. Alors le sommet S de $\mathcal{Q}$ est situé sur l'axe des abscisses. Dans ce cas, la V200 donne : $\boxed{a = b = c = x_0 = 0}$. En d'autres termes, il n'existe pas de parabole $\mathcal{Q}$ tangente à $\mathcal{P}$ dont le sommet est situé sur l'axe des abscisses (sauf si $S = O$, cas que nous avons déjà traité).

3^e^ cas particulier : $r = 0$. Alors le sommet S de $\mathcal{Q}$ est situé sur l'axe des ordonnées. Dans ce cas, la V200 donne : $\boxed{s = b = c = x_0 = 0 \text{ et } a \text{ quelconque}}$ ou $\boxed{a = 1 \text{ et } s = b = c = 0 \text{ et } x_0 \text{ quelconque}}$. Le premier cas est encore celui où $S = O$, le deuxième est de nouveau le cas où $\mathcal{P} = Q$, traité déjà ci-dessus. On peut donc conclure qu'il n'existe pas de parabole $\mathcal{Q}$ tangente à $\mathcal{P}$ dont le sommet est situé sur l'axe des ordonnées (sauf si $S = O$, cas que nous avons déjà traité).

Cas général : $r \neq 0$ et $s \neq 0$ et $r^2 \neq s$. Alors S n'appartient ni à $\mathcal{P}$, ni à Ox, ni à Oy. Dans ce cas il existe toujours une parabole ***unique*** $\mathcal{Q}$ tangente à $\mathcal{P}$ et son équation est donnée par :

$$\mathcal{Q} : y = \frac{-s}{r^2 - s} x^2 + \frac{2rs}{r^2 - s} x + \frac{-s^2}{r^2 - s}$$

Le point de tangence est $C\left(\frac{s}{r}, \frac{s^2}{r^2}\right)$.

La tangente commune aux deux paraboles en ce point est :

$$t : y = f'(\tfrac{s}{r})(x - \tfrac{s}{r}) + f(\tfrac{s}{r})$$
$$\Leftrightarrow y = 2\tfrac{s}{r} x - \tfrac{s^2}{r^2}$$

G. Lorang