Partie sans V200 (50')

Question 1 — 25 (=2+3+2+2+8+5+3) points

Question préliminaire :

(0) Montrer que : $x^8 + 3x^4 + 1 > 0$, pour tout réel x.

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2} + x^2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est ***définie*** et ***continue*** sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la parité de f et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

(4) a) Montrer d'abord que f est dérivable en tout réel x ***non nul*** et que :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)(x^2+1)}{x^8+3x^4+1}, \text{ si } x \neq 0.$$

b) Etudier ensuite la dérivabilité de f en 0 et conclure.

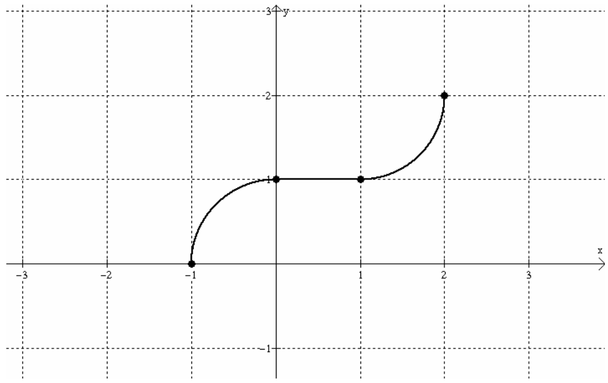
(5) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

(6) En déduire la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$.

Partie avec V200 (50')

Question 2 35 (=15+10+10) points

(1) Déterminer la fonction f dont le graphe est la réunion des deux quarts de cercles de rayon 1 (voir la note [1]) et du segment représentés ci-dessous. Etudier si la fonction f est a) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,2[$ et b) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,2[$.

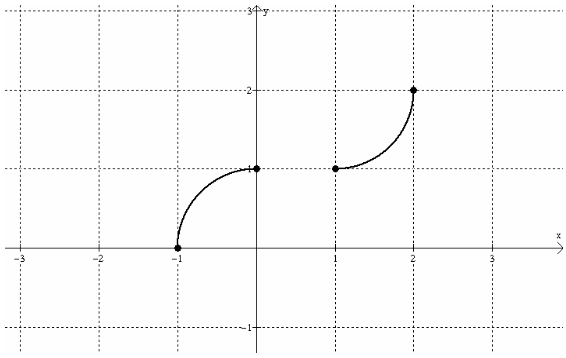


(2) Déterminer la fonction g définie sur $[-1,2]$ et ayant les propriétés suivantes :

a) sur $[-1,0]$ et $[1,2]$ le graphe de g coïncide avec les deux quarts de cercle de rayon 1 représentés ci-dessous ;

b) g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,2[$ (« raccords sans heurts ») ;

c) sur $[0,1]$ la fonction g est polynômiale et de degré minimal.



(3) Représenter graphiquement g sur $[0,1]$ avec la V200. Vous serez surpris ! On ne demande pas de reproduire le graphe sur la feuille, mais d'établir le tableau de variation de g sur $[0,1]$. En déduire que :

$$(\forall x \in [0,1]) \qquad 0{,}99 < g(x) < 1{,}01\,.$$

G. Lorang

[1] On rappelle que l'équation canonique du cercle de centre (a,b) et de rayon r est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\,.$$