Question 1

(0) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^8 \geq 0,\ 3x^4 \geq 0$ et $1 \geq 1$.

Donc : $x^8 + 3x^4 + 1 \geq 1 > 0$.

(1) Sur $\mathbb{R}^*$, f est une composée de deux fonctions respectivement continue sur $\mathbb{R}$ (Arctan) et continue sur $\mathbb{R}^*$ ($x \mapsto \frac{1}{x^2} + x^2$). Donc f est déjà continue sur $\mathbb{R}^*$. f est de plus continue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) = \text{"}\operatorname{Arctan}(+\infty)\text{"} = \frac{\pi}{2} = f(0).$$

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) f est paire car :

$$f(-x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{(-x)^2} + (-x)^2\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) = f(x).$$

Donc $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à Oy et il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$.

(3) $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) = \text{"}\operatorname{Arctan}(+\infty)\text{"} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet en $+\infty$ l'A.H. : $y = \frac{\pi}{2}$.

(4) a) Sur $\mathbb{R}^*$, f est une composée de deux fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)' \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}+2+x^4} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}+2x\right) \\
&= \frac{1}{\frac{3x^4+1+x^8}{x^4}} \cdot \frac{2x^4-2}{x^3} \\
&= \frac{2x^4\left(x^4-1\right)}{\left(3x^4+1+x^8\right)x^3} \\
&= \frac{2x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^8+3x^4+1}, \text{ si } x \neq 0
\end{aligned}$$

b) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{H}{\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Ainsi $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ et l'expression ci-dessus de la dérivée est valable pour tout réel x. (f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.)

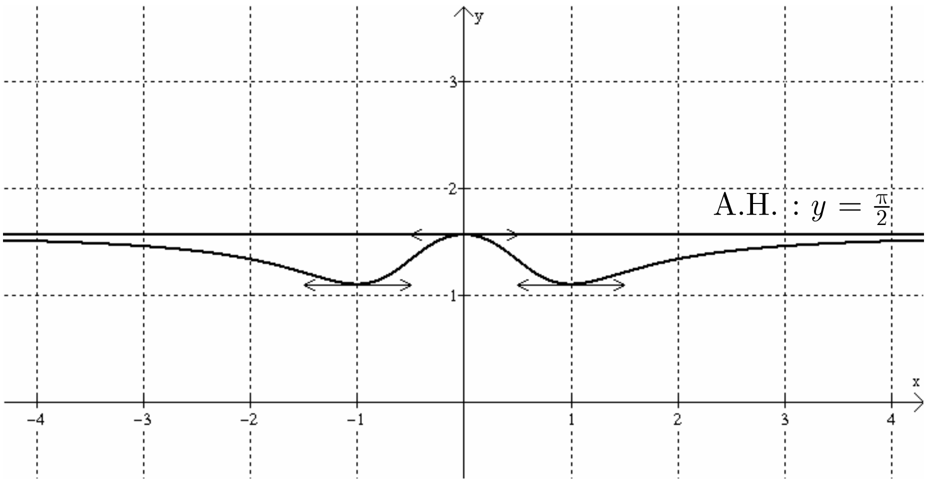
(5) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

f' admet donc deux racines sur $\mathbb{R}_+$ (0 et 1) et d'après la question préliminaire le signe de f' est celui de $x\left(x^2-1\right)$. On obtient le TV suivant sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$ (M)	$\searrow$	$\mathrm{Arctan}(2)$ (m)	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

La calculatrice donne : $\mathrm{Arctan}\,2 \simeq 1{,}107$.

(6) La représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ est obtenue en tenant compte de la symétrie de la courbe par rapport à Oy :



Question 2

(1) Equation du cercle de centre O et de rayon 1 :

$$x^2 + y^2 = 1 \underset{V200}{\Leftrightarrow} y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Equation du cercle de centre (1,2) et de rayon 1 :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \underset{V200}{\Leftrightarrow} y = 2 \pm \sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

La fonction cherchée f est donc :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) Il est clair que cette fonction est continue sur $[-1{,}2]$. Il est aussi clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1{,}2[$: en effet,

$$f'(x) \underset{V200}{=} \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} & \text{si } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

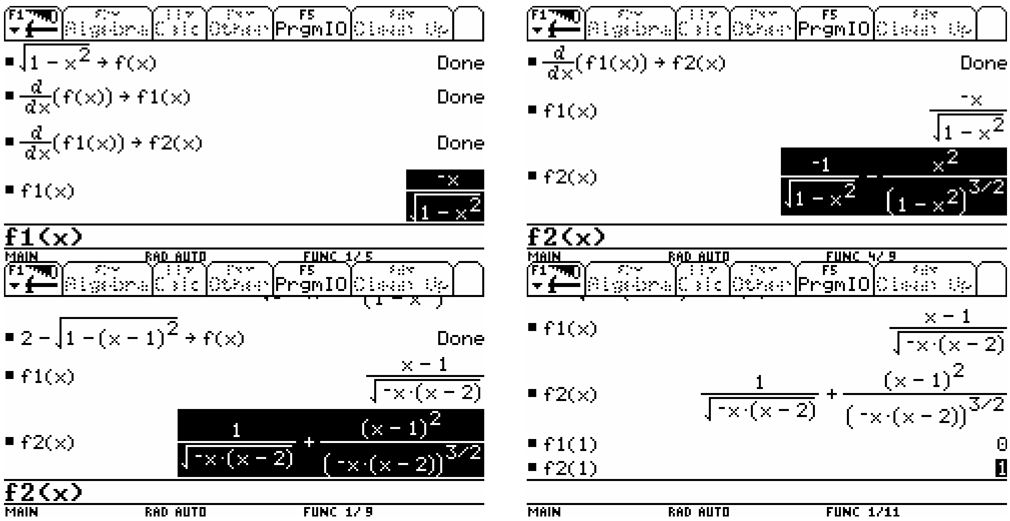
Les inégalités larges en 0 et 1 sont justifiées par le fait que $f_g\,'(0) = 0 = f_d\,'(0)$ et $f_g\,'(1) = 0 = f_d\,'(1)$. Donc $f\,'(0) = 0$ et $f\,'(1) = 0$; $\mathcal{G}_f$ a des tangentes horizontales en (0,1) et en (1,1). Donc f est continûment dérivable sur $]-1,2[$.

c) Etudions la dérivée seconde de f :

$$f\,''(x) \underset{V200}{=} \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} + \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{\left(1-(x-1)^2\right)^3}} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Cette fois-ci : $f_g\,''(0) = -1$ et $f_d\,''(0) = 0$, donc $f\,''(0)$ n'existe pas. De même : $f_g\,''(1) = 0$ et $f_d\,''(1) = 1$, donc $f\,''(1)$ n'existe pas.

Ainsi f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,2[$.



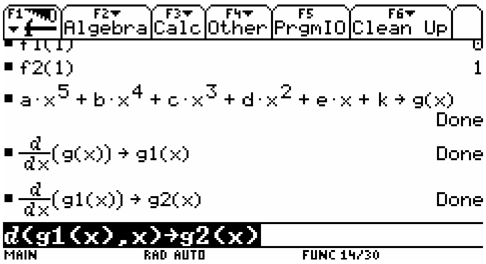
(2) D'après les résultats de la question précédente, la fonction g est déterminée sur $[0,1]$ par les 6 contraintes suivantes :

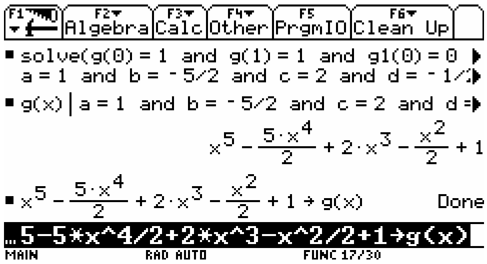
$$\begin{cases} g(0) = 1 \text{ et } g(1) = 1 \\ g\,'(0) = 0 \text{ et } g\,'(1) = 0 \\ g\,''(0) = -1 \text{ et } g\,''(1) = 1 \end{cases}$$

Puisque g est polynômiale sur $[0,1]$, le degré minimal de ce polynôme est 5. On cherche donc $g(x)$ sous la forme : $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + k$ sur $[0,1]$. (Il faut éviter la lettre f comme constante car elle est déjà réservée pour une fonction dans la V200 !!)

On résout le système ci-dessus avec la V200 et finalement on a :

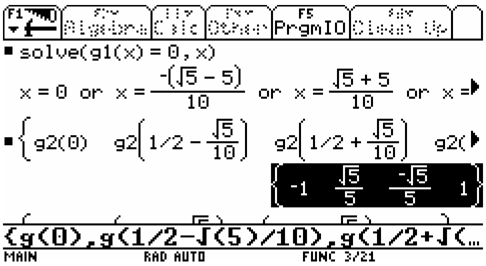
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

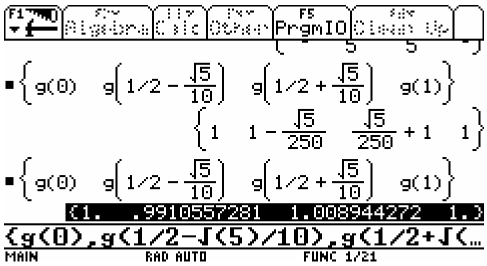




(3) On résout l'équation $g'(x) = 0$ sur $[0,1]$ et on trouve 4 racines distinctes, symétriques par rapport à $x = \frac{1}{2}$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \text{ ou } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \text{ ou } x = 1$$





Comme g' est du 4[e] degré, les 4 racines de g' sont des racines simples et on sait que g admet un extrémum en chacune d'elles. On détermine le type de l'extrémum en calculant la valeur de la dérivée seconde :

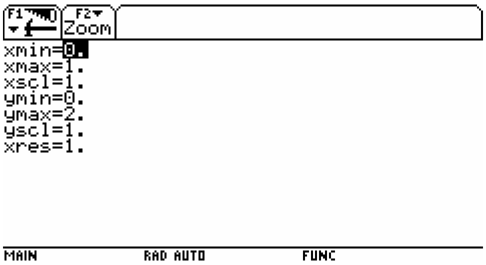
- $g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow g$ admet un maximum en 0 ;
- $g''\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow g$ admet un minimum en $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$;
- $g''\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 \Rightarrow g$ admet un maximum en $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$;
- $g''(1) = 1 > 0 \Rightarrow g$ admet un minimum en 1 ;

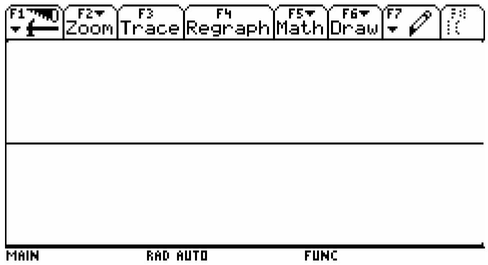
D'où le TV de g sur $[0,1]$:

x	0		$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$		$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$		1
$g(x)$	1 (M)	↘	$1 - \frac{\sqrt{5}}{250}$ (m)	↗	$1 + \frac{\sqrt{5}}{250}$ (M)	↘	1 (m)

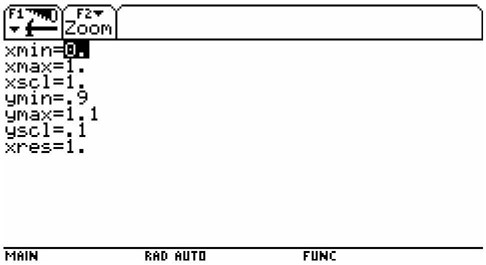
Le minimum de g sur $[0{,}1]$ vaut environ 0,991, alors que le maximum est environ 1,009. D'où le résultat : $(\forall x \in [0{,}1]) \quad 0{,}99 < g(x) < 1{,}01$.

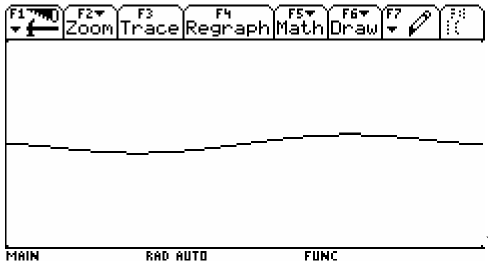
(Voici la représentation graphique de g sur $[0{,}1]$, obtenue avec la V200 :





g semble être constante, mais bien sûr, cela est dû à la mauvaise résolution de l'écran. Avec d'autres paramètres de fenêtre, on voit bien que g n'est pas constante :





)

G. Lorang