2B — Corrigé du devoir I,1 — 23.10.09

Question 1

(1) C.E : $q(x) = x^3 - 3x + 2 \neq 0$

1 est une racine évidente de $q(x)$ qui est donc divisible par $x-1$. Le schéma de Horner et la factorisation du quotient donnent successivement :

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-1)\left(x^2+x-2\right) \\ &= (x-1)(x-1)(x+2) \\ &= (x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

Donc : $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$.

(2) On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \ (\text{et } x \in \operatorname{dom} f) \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2-4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

La racine -2 est à exclure car elle n'est pas dans le domaine. Les racines de f sont donc 0 et 2. f est continue en ces réels car :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \text{ et } \lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-1)^2\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

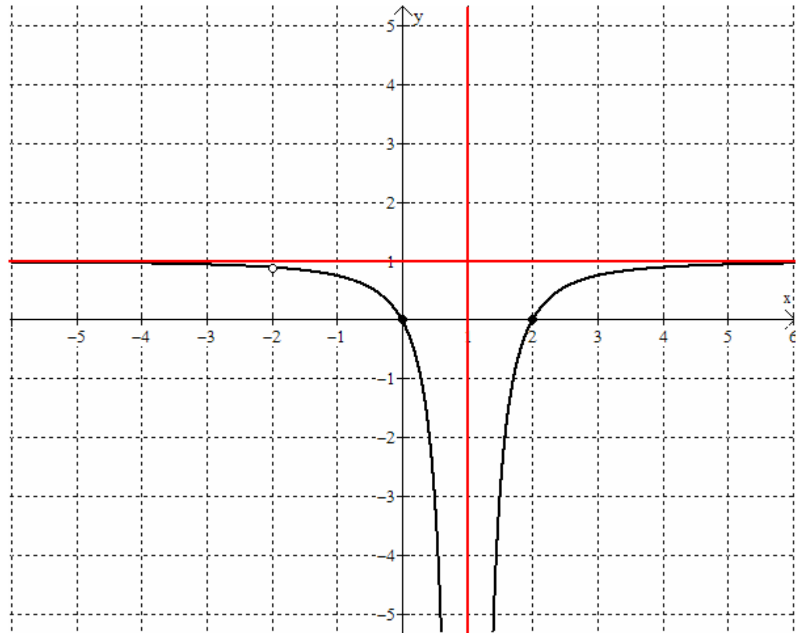
$\Rightarrow$ A.V. : $x = 1$

$\displaystyle \lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{8}{9} \quad (\neq f(-2))$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}_f$ présente un trou en $\left(-2, \frac{8}{9}\right)$.

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \Rightarrow$ A.H. : $y = 1$.

(5) Voici le graphe complet :



Question 2

(1) $\operatorname{dom} g = \operatorname{dom}_c g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(2) $\displaystyle \lim_{x\to -1^\pm} g(x) = \frac{-3}{0^\pm} = \mp\infty \Rightarrow$ A.V. : $x = -1$.

(3) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ A.H. : $y = \frac{2}{3}$.

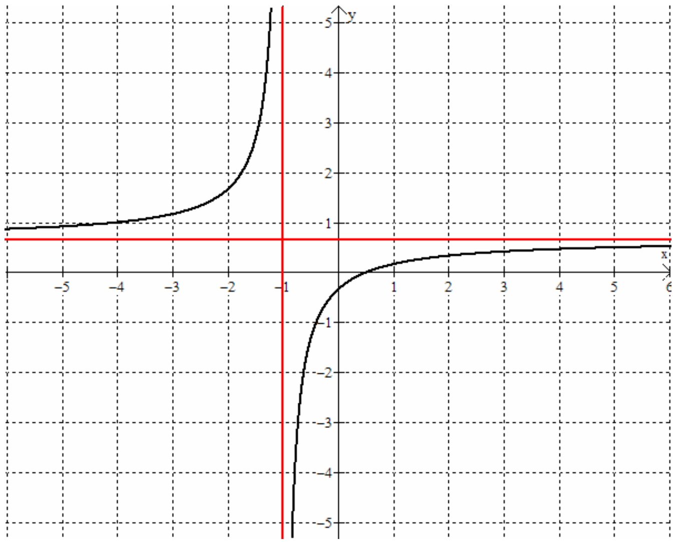
(4) On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$
\begin{aligned}
&2x-1=(3x+3)\frac{2}{3}-3\\
&\Leftrightarrow g(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{3x+3}\\
&\Leftrightarrow g(x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{x+1}
\end{aligned}
$$

Le graphe de g est donc l'hyperbole de centre de symétrie $\Omega\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ et d'équation :

$$Y=-\frac{1}{X}$$

dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$.



(5) On a : $h(x)=\dfrac{2x^2-x}{3x^2+3x}=\dfrac{x(2x-1)}{x(3x+3)}$.

Donc : $\operatorname{dom} h=\operatorname{dom}_c h=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Or :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\right)\quad h(x)=\frac{2x-1}{3x+3}=g(x)$$

Par conséquent h est la ***restriction*** de g à $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Le graphe de h coïncide avec celui de g sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. $\mathcal{G}_h$ est l'hyperbole précédente avec un trou en $\left(0,\frac{-1}{3}\right)$ car :

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=-\frac{1}{3}.$$

Question 3

(1) C.E. :

$$
\begin{cases}
x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1\\
x-1\neq\sqrt{x+1}
\end{cases}
$$

La 2e condition s'écrit, en supposant que $x\geq 1$ (pour que le 1er membre soit ≥ 0) :

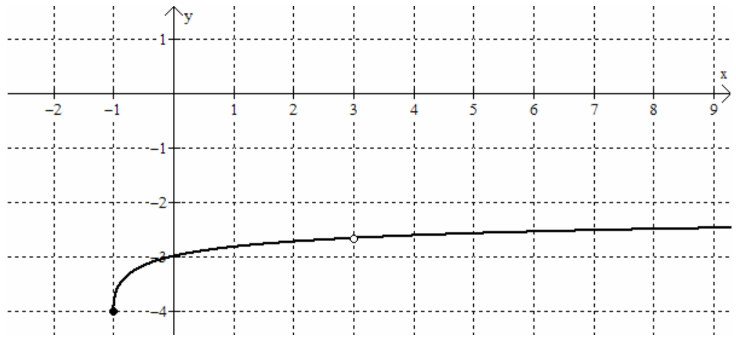
$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2\neq x+1\\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1\neq x+1\\
&\Leftrightarrow x(x-3)\neq 0\\
&\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ (à exclure) et } x\neq 3
\end{aligned}
$$

Donc : $\operatorname{dom} k=\operatorname{dom}_c k=[-1,+\infty[\setminus\{3\}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -1} k(x) = \frac{8}{-2} = -4 = k(-1)$, donc k est continue en -1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} k(x) &= \lim_{x\to 3} \frac{(6-2x)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x-1-\sqrt{x+1}\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(6-2x)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{(x-1)^2-(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2(3-x)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{x(x-3)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{-2\cancel{(x-3)}\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{x\cancel{(x-3)}}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{-2\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{x}\\ &= \frac{-8}{3} \quad (\neq k(3))\end{aligned}$$

Donc k est discontinue en 3 et $\mathcal{G}_k$ présente un trou en $\left(3,-\frac{8}{3}\right)$.



Question 4

(1) Tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$	0	x
$\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert 2x+1\rvert-1}$	$\dfrac{x}{2(x+1)}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	//	$\dfrac{1}{2}$

On en déduit que $\operatorname{dom} p = \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

(2) a) Il est clair que p est discontinue en 0 car $p(0)$ n'existe pas. On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} p(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} p(x) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\mathcal{G}_p$ présente au point d'abscisse 0 un saut d'amplitude 1.

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} p(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} p(x) = -\dfrac{1}{2} = p\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, donc p est continue en $-\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1^\pm} p(x) = \dfrac{-1}{0^\pm} = \mp\infty$, donc A.V. : $x=-1$.

Finalement : $\operatorname{dom}_c p = \mathbb{R}\setminus\{0,-1\} = \operatorname{dom} p$.

G. Lorang