Question 1

(1) C.E. : $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$.

Donc : $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom} g = \operatorname{dom}_c g = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$.

(2) a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0 = f(2)$, donc f est continue en 2.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = +\infty \;\Rightarrow\;$ pas d'A.H.

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x} = \pm 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x \cancel{- x^2}}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

$\Rightarrow$ A.O.D. : $y = x - 1$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x \cancel{- x^2}}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{-2x} = +1$$

$\Rightarrow$ A.O.G. : $y = -x + 1$

(3) On remarque que $g(x) = f(x) - x + 1$. Donc $\mathcal{G}_g$ admet l'A.H.D : $y = 0$ et l'A.O.G : $y = -2x + 2$. En effet :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$, car $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O.D. : $y = x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(-2x+2)\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x+1+2x-2\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]$

$= 0$

car $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O.G. : $y=-x+1$.

Question 2

Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{-x^3+3x+2}{x^2+x}$.

(1) C.E. : $x^2+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq -1$, donc $\operatorname{dom} h = \operatorname{dom}_c h = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

(2) –1 est une racine du polynôme $p(x)=-x^3+3x+2$, donc $p(x)$ est divisible par $x+1$. Le schéma de Horner donne : $p(x)=(x+1)(-x^2+x+2)$. Or, $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$, donc $p(x)=-(x+1)^2(x-2)$. On peut alors simplifier $h(x)$:

$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\})\quad h(x)=\frac{-(x+1)^2(x-2)}{x(x+1)}=-\frac{(x+1)(x-2)}{x}=\frac{-x^2+x+2}{x}.$$

Tableau du signe de h (attention, $h(x)$ n'est pas défini en -1) :

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$h(x)$	+	||	–	||	+	0	–

(3) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} h(x)=\dfrac{2}{0^\pm}=\pm\infty$, donc A.V. : $x=0$

$\lim\limits_{x\to -1} h(x)=0\neq h(-1)$, h est discontinue en 0 et $\mathcal{G}_h$ admet un trou en $(-1,0)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-x=\mp\infty$, donc pas d'A.H.

On a :

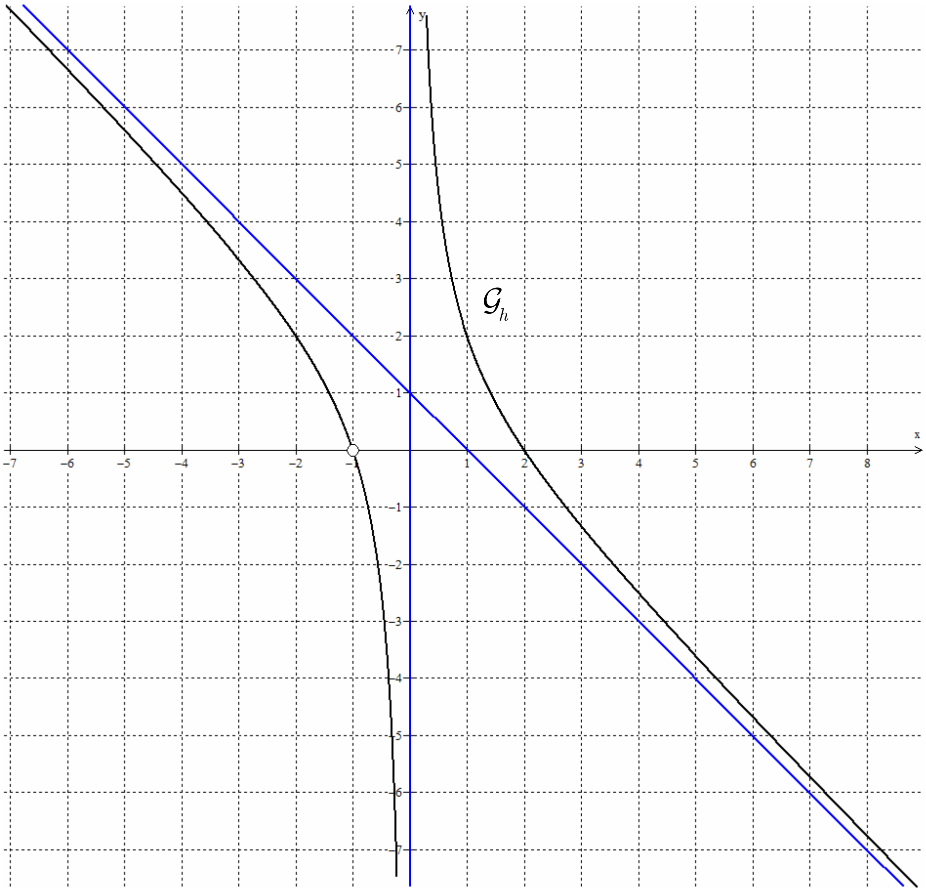
$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\})\quad h(x)=\frac{-x^2+x+2}{x}=-x+1+\frac{2}{x}$$

Donc :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[h(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x}=0^\pm$, c.-à-d. $\mathcal{G}_h$ admet l'A.O. Δ: $y=-x+1$ (et $\mathcal{G}_h$ est située au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et en dessous de Δ au voisinage de $-\infty$.

(4) La position de $\mathcal{G}_h$ par rapport à Δ dépend du signe de $\varepsilon(x) = h(x) - (-x+1) = \dfrac{2}{x}$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{G}_h$ est située au-dessus de Δ sur $]0,+\infty[$ et en-dessous de Δ sur $]-\infty,0[\setminus \{-1\}$.

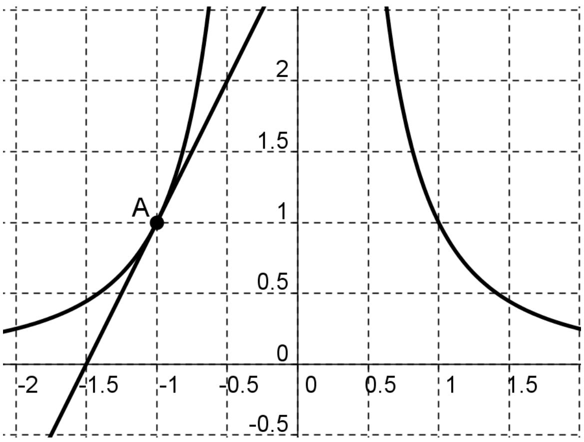
(5) Représentation graphique :



Question 3

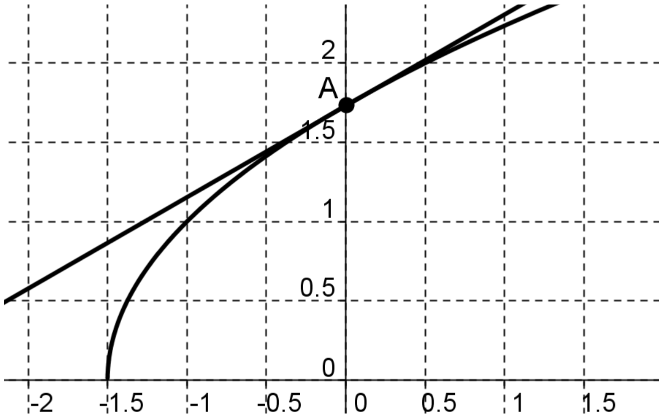
(1)
$$
\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{1 - x^2}{x^2(x+1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{x^2\cancel{(x+1)}} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(1-x)}{x^2} = 2
\end{aligned}
$$

I.G. : La tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $(-1,1)$ admet la pente 2.



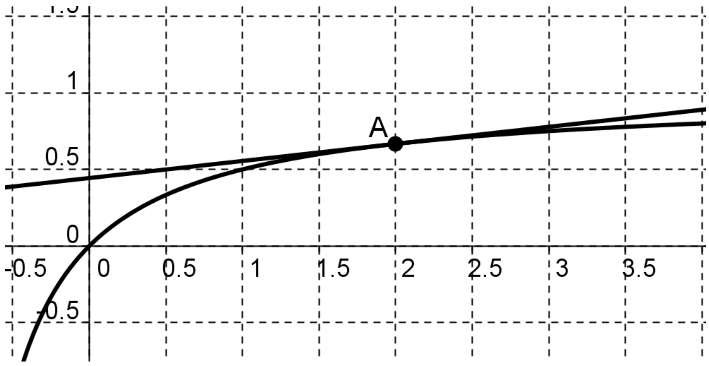
(2) $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

I.G. : La tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $\left(0,\sqrt{3}\right)$ admet la pente $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



(3) $$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{2}{3}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-2x-2}{3(x+1)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{3\cancel{(x-2)}(x+1)}$$
$$=\frac{1}{9}$$

I.G. : La tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ admet la pente $\frac{1}{9}$.



G. Lorang